



Estimateurs d'erreur et maillage adaptatif: application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux

Ramzy Boussetta

► To cite this version:

Ramzy Boussetta. Estimateurs d'erreur et maillage adaptatif: application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux. Sciences de l'ingénieur [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. Français. NNT : 2005ENMP1258 . pastel-00001210

HAL Id: pastel-00001210

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001210>

Submitted on 26 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

M. Pierre Beckers.....	Président
M. Nicolas Moës.....	Rapporteur
M. Alain Rassineux.....	Rapporteur
M. Karim Mahjoub.....	Examineur
M. Lionel Fourment.....	Examineur

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF) de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris. Je remercie Monsieur Jean-Loup Chenot, Directeur du centre, de m'avoir donné l'occasion d'y réaliser ce travail.

Je remercie également Monsieur Thierry Coupez de m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche «Calcul Intensif en mise en forme des Matériaux» (CIM).

Monsieur Pierre Beckers m'a fait l'honneur d'accepter de faire parti du jury, je le remercie vivement pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Mes remerciements les plus vifs à Messieurs Nicolas Moës et Alain Rassineux qui ont accepté la lourde tâche de rapporteur ainsi qu'à Monsieur Karim Mahjoub pour sa participation au jury.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Lionel Fourment pour sa disponibilité et sa générosité exceptionnelles. J'ai apprécié tout au long de ces trois années les échanges, autant scientifiques qu'amicaux, qui ont caractérisé notre collaboration. Je n'oublierai pas ses qualités humaines, sa rigueur scientifique et l'impact qu'elles ont pu avoir sur l'ensemble de mon travail.

Je voudrais remercier tous mes collègues que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces trois années au CEMEF. Je pense à Mehdi, Romain, Josué, Frédéric, Delphine, Olga, Sorin, Hugues, Luisa, Cyril, Laurent, Céline,... et pardon à tous ceux que j'oublie!

Merci à mes amis Ahmed, Walid, Abdelbasset, Mehdi et sans oublier Nadia dont j'ai eu le plaisir de faire la connaissance au CEMEF.

Une pensée très affectueuse pour ma fiancée Sana qui a fait de moi une personne heureuse. Son soutien et sa présence pendant cette dernière ligne droite m'ont été indispensables (à toi la thèse maintenant !)

Je voudrais enfin exprimer ma reconnaissance et ma profonde gratitude envers mes parents ainsi qu'à mes frères et sœurs pour leur encouragement et leur soutien durant toutes ces années.

À mes parents

Table des matières

Introduction générale	11
Chapitre 1	
Problème mécanique: formulation et méthode de résolution.....	15
1.1 Modélisation mécanique du forgeage	17
1.1.1 Équation de l'équilibre dynamique	17
1.1.2 Équation de l'incompressibilité	18
1.1.3 Les conditions aux limites	18
1.1.4 Les lois de comportement	19
1.1.4.1 Lois rhéologiques	19
1.1.4.2 Lois de frottement	25
1.1.5 Le problème mécanique à résoudre	26
1.2 Discrétisation du problème mécanique.....	27
1.2.1 Formulation faible.....	27
1.2.2 Discrétisation spatiale	27
1.2.3 Discrétisation temporelle	30
1.2.4 Traitement du contact	31
1.3 Résolution numérique du problème discret.....	32
1.4 Remaillage et transport des variables	32
1.4.1 Transport P1	33
1.4.2 Transport P0.....	34
Chapitre 2	
Estimation d'erreur	37
2.1 Introduction.....	39
2.1.1 Définition de l'erreur	39
2.1.2 Mesure de l'erreur.....	39
2.2 Méthodes d'estimation d'erreur.....	41
2.2.1 Estimation d'erreur a priori.....	41
2.2.2 Estimation d'erreur a posteriori	42

2.2.2.1	Problème d'élasticité linéaire	43
2.2.2.2	Efficacité d'un estimateur d'erreur.....	43
2.2.2.3	Estimateurs d'erreur basés sur le calcul des résidus des équations d'équilibre et les sauts des contraintes aux frontières des éléments	44
2.2.2.4	Estimateurs d'erreur basés sur le concept de l'erreur en relation de comportement 47	
2.2.2.5	Estimateurs d'erreur basés sur la comparaison à une contrainte continue.....	49
2.2.2.6	Choix d'un estimateur pour la mise en forme	52

Chapitre 3

Maillage et adaptation 55

3.1	Introduction.....	57
3.2	Méthodes de génération de maillage d'un domaine à partir du maillage de sa frontière	57
3.2.1	Méthode frontale	57
3.2.2	Méthode de type Octree	59
3.2.3	Méthode de type Delaunay	60
3.2.3.1	Définitions	60
3.2.3.2	Méthode de maillage de Delaunay	60
3.2.4	Méthode de maillage par optimisation topologique.....	61
3.2.4.1	Topologie de maillage	62
3.2.4.2	Critère de volume minimal.....	62
3.2.4.3	Génération de maillage par le mailleur topologique.....	63
3.2.4.4	Remaillage de la surface et couplage avec le volume	65
3.2.4.5	Adaptation de maillage : carte de taille	66
3.3	Techniques d'adaptation de maillage	67
3.3.1	h - adaptation.....	67
3.3.2	r -adaptation	68
3.3.3	p -adaptation.....	69
3.3.4	hp -adaptation.....	70
3.4	Stratégies d'optimisation du maillage	70
3.4.1	Stratégie d'optimisation pour une précision imposée	70
3.4.2	Stratégie d'optimisation pour un nombre d'éléments maximal imposé	72
3.5	Traitement de la singularité du problème	73
3.5.1	Identification des singularités et calcul des taux de convergence réels	74
3.5.2	Atténuation de l'effet de la singularité par itérations de maillages adaptatifs 74	

Chapitre 4

Techniques de recouvrement 77

4.1	Introduction.....	79
-----	-------------------	----

4.2	Technique SPR (Superconvergent Patch Recovery)	79
4.2.1	Principe de la technique	79
4.2.2	Recouvrement des contraintes par la technique SPR.....	81
4.2.3	Recouvrement SPR sur la frontière du domaine.....	84
4.2.4	Technique SPR améliorée.....	84
4.2.5	Synthèse	88
4.3	Technique des différences finies locales	88
4.3.1	Principe de la technique	88
4.3.2	Définition du voisinage différences finies	91
4.3.3	Synthèse	92
4.4	Technique MPR (Minimal Patch Recovery)	93
4.4.1	Principe de la technique	93
4.4.2	Recouvrement MPR sur la frontière du domaine	94
4.4.3	Synthèse	96
4.5	Technique REP (Recovery by Equilibrium in Patches)	97
4.5.1	Principe de la technique	97
4.5.2	Recouvrement REP sur la frontière du domaine.....	100
4.5.3	Technique REP modifiée	100
4.5.4	Technique REP améliorée : REP ²	101
4.5.5	Synthèse	102
4.6	Conclusions.....	103
Chapitre 5		
Estimateurs d'erreur de type Z^2 : évaluation et étude d'efficacité		105
5.1	Introduction.....	107
5.2	Efficacité des estimateurs d'erreur en élasticité	107
5.2.1	Présentation du problème d'élasticité étudié	107
5.2.2	Étude numérique	109
5.2.2.1	Tests de convergence de la méthode des éléments finis	110
5.2.2.2	Choix du nombre de voisins pour le recouvrement LO.....	110
5.2.2.3	Etude locale	112
5.2.2.4	Etude globale.....	115
5.2.2.5	Application à l'adaptation de maillage et comparaison des estimateurs	118
5.2.2.6	Synthèse	120
5.3	Efficacité des estimateurs d'erreur en viscoplasticité.....	121
5.3.1	Présentation des problèmes de viscoplasticité étudiés.....	121
5.3.1.1	Problème 1 : écrasement d'un lopin cubique entre tas plats.....	121
5.3.1.2	Problème 2 : filage d'une barre	123

5.3.2	Étude numérique	124
5.3.2.1	Étude locale	124
5.3.2.2	Étude globale	126
5.3.2.3	Application à l'adaptation de maillage et comparaison des estimateurs	128
5.3.2.4	Synthèse	132

Chapitre 6

Remaillage adaptatif : applications..... 133

6.1	Introduction.....	135
6.2	Vers une stratégie d'optimisation fiable pour la mise en forme des matériaux	135
6.3	Applications	140
6.3.1	Forgeage d'un triaxe	140
6.3.1.1	Remaillage adaptatif dans la pièce à forger	140
6.3.1.2	Remaillage adaptatif dans la pièce et les outils	145
6.3.2	Forgeage d'un engrenage	148
6.3.3	Filage à travers une filière ellipsoïdale	152
6.3.4	Forgeage du panneau de commande d'ouverture du train avant d'un avion (A 320)	156
6.3.5	Problème de poinçonnement d'une tôle.....	160

Conclusions et perspectives..... 163

Annexes 167

Bibliographie 179

Introduction générale

Depuis ses premières applications en calcul des structures vers le début des années 70, la méthode des éléments finis est devenue un moyen incontournable pour la résolution de problèmes très variés de la mécanique des solides et des fluides, de transferts thermiques, d'électromagnétisme et de bien d'autres domaines d'applications. De nombreux logiciels de calculs éléments finis sont aujourd'hui couramment employés dans les milieux industriels pour la simulation du comportement de systèmes physiques de plus en plus complexes. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement effréné et les possibilités d'application augmentent sans cesse. Cependant les questions qui préoccupaient toujours les ingénieurs sont: quel est le degré de fiabilité de la simulation ? Quel crédit lui accorder ? Comment peut-on améliorer la précision ?

Dans la méthode des éléments finis les calculs s'appuient sur un maillage (discrétisation spatiale) associée à la géométrie du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation. Leur précision dépend de la taille des éléments (le pas de discrétisation spatiale). Plus ces derniers sont petits plus les calculs sont précis et plus la simulation est fiable. En pratique, il n'est pas possible de raffiner uniformément la taille des éléments autant que nécessaire, pour des raisons évidentes de coûts de calculs. Toutefois, il est possible d'optimiser le maillage en raffinant seulement dans des zones prédéfinies (où l'erreur est susceptible d'être plus importante qu'ailleurs) et en déraffinant en dehors de celles-ci : on parle ainsi d'*adaptation de maillage*. Ce processus est généralement dicté par des considérations liées, d'une part, à la géométrie du domaine (courbures, singularité, etc.) et d'autre part, à la physique du problème étudié (écoulements complexes, concentrations de contraintes, gradients thermiques, etc.). Il nécessite l'identification a priori des zones à raffiner et celles à déraffiner ainsi que les tailles à imposer, ce qui est en soi un exercice difficile. Traditionnellement, cette identification était le fruit d'une expérience et d'un savoir faire acquis par les spécialistes et les utilisateurs expérimentés. Les besoins industriels actuels préconisent de plus en plus l'automatisation complète des logiciels de calcul. Il s'avère important que les moyens mis en œuvre soient accessibles par la majorité des effectifs. On s'oriente ainsi vers une exigence d'automatisation du processus d'adaptation de maillage. Il devra être entièrement automatique sans requérir un savoir-faire particulier de la part de l'utilisateur.

Automatiser un processus d'adaptation est en effet un problème largement étudié. Les procédures traditionnelles, et les plus utilisées, reposent sur des techniques de contrôle de

l'erreur de discrétisation spatiale. Ce terme désigne l'écart entre la solution exacte du problème et la solution éléments finis. Ainsi, les ingrédients nécessaires à la mise en œuvre d'un tel processus concernent à la fois les aspects évaluation de la solution éléments finis, le calcul de la taille optimale des éléments pour satisfaire une précision donnée, et la génération d'un nouveau maillage respectant les tailles ainsi calculées.

La qualité de la solution éléments finis est mesurée par des techniques d'*estimation d'erreur a posteriori*. Les premiers travaux dans ce domaine datent de la fin des années 70. Depuis, il s'est enrichi grâce au développement de nouvelles approches, parmi lesquelles on peut distinguer principalement les travaux de Babuška et Rheinboldt [Babuška 78], qui utilisent les résidus des équations d'équilibre pour construire des estimateurs d'erreur, ceux de Ladevèze et al. [Ladevèze 86] qui ont introduit la notion d'erreur en relation de comportement, et les travaux de Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 87] qui ont proposé un estimateur d'erreur basé sur le calcul de l'écart entre la contrainte éléments finis et une contrainte continue obtenue par une technique de lissage de type moindres carrés.

Une fois l'erreur estimée, utilisant l'une ou l'autre des approches, il est possible de contrôler la qualité de la solution en calculant la taille optimale des éléments. On construit ainsi un maillage optimal, soit au sens de la précision souhaitée, soit au sens de la taille du problème étudié. Les applications industrielles s'orientent de plus en plus vers des problèmes très complexes: structures tridimensionnelles, problèmes non linéaires, grandes déformations, etc. Une simulation réaliste peut exiger des dizaines de millions d'éléments dans le maillage. Pour réaliser de tels calculs, il est indispensable de maîtriser à la fois la qualité de la solution et la taille du problème. Le développement des stratégies d'adaptation efficaces et robustes trouve ici toute son importance. C'est dans ces perspectives que notre travail s'est développé.

Objectifs des travaux de thèse

Les objectifs de ce travail de thèse tournent autour deux axes principaux :
Le premier concerne l'étude des estimateurs d'erreur de type Zienkiewicz-Zhu (Z^2) dans le cadre des problèmes 3D de la mise en forme des matériaux incompressibles. Cette étude comporte deux parties : dans la première, les estimateurs sont développés dans le cadre de l'élasticité linéaire. Elle concerne le contrôle d'erreur dans les outils de forgeage dont la déformation est supposée purement élastique. Dans la deuxième partie, les estimateurs sont étendus aux problèmes non linéaires de type élasto-viscoplastique incompressible, c'est le cadre du contrôle d'erreur dans les pièces à forger. Précisons que la majorité des travaux sur les estimateurs d'erreur en trois dimensions se situent dans le cadre de l'élasticité linéaire. Les études de comportements non linéaires sont rares et restreintes aux problèmes bidimensionnels. D'autre part, les résultats théoriques dans ce contexte sont très réduits. Notre approche revêt alors un caractère heuristique.

Le deuxième axe consiste à développer une stratégie de remaillage adaptatif efficace et fiable dédiée à la simulation numérique tridimensionnelle des procédés de mise en forme des matériaux. L'adaptation concerne les calculs dans la pièce et les outils et elle sera pilotée par les estimateurs d'erreur de type Z^2 développés dans la première partie.

L'étude et l'implémentation numérique sont réalisées dans le cadre du logiciel de simulation 3D de forgeage Forge3[®] développé au CEMEF.

Le cadre industriel de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un grand projet national Performance pluri-partenaires intitulé « Simulforge » et financé par le ministère de l'industrie. Les partenaires industriels impliqués dans ce travail de recherche sont : Ascoforge Safe, Usinor Industeel, Estamfor, Auber et Duval Fortech (établissement de Pamiers), Manoir Industries, PSA-Peugeot-Citroën, Setforge, Sifcor, Snecma Moteurs et SNR Roulements, avec la collaboration du Centre Technique des Industries Mécaniques (Cetim) et la société d'édition de logiciels Tranvalor (son rôle est de valoriser les développements numériques des thèses en les intégrant dans une version commercialisée de Forge3[®]).

Le projet Simulforge fait partie des 119 technologies clés de 2005¹ (la simulation numérique des procédés). Il est soutenu par l'Etat français à travers la Direction Générale de l'Industrie, des Technologies de l'Information et des Postes (DiGITIP).

État de l'art au démarrage de Simulforge

Le logiciel Forge3[®] offre la possibilité de contrôler globalement et localement la taille des éléments du maillage. Au niveau local, il comprend un algorithme de réduction de la taille des éléments pour minimiser les pénétrations de matière dans l'outil. Il permet aussi d'utiliser des boîtes de remaillage, de manière à imposer une taille d'élément donnée dans des zones prédéfinies. Cette technique nécessite donc de connaître a priori les zones où les raffinements sont nécessaires, ainsi que la taille d'éléments à imposer. Si un raffinement est nécessaire à un moment de la simulation, le maillage devra être raffiné dans cette zone pendant toute la durée des calculs.

Plan de la thèse

Le travail présenté dans ce manuscrit est composé de six chapitres:

Dans un premier temps (chapitre 1), nous présenterons la formulation mathématique du problème mécanique de forgeage et les principales équations de sa discrétisation par la méthode des éléments finis, ainsi que les schémas d'intégration et de résolution utilisés dans le cadre du logiciel Forge3[®].

Le chapitre 2 sera consacré à l'étude des notions d'estimation d'erreur. Nous présenterons une étude bibliographique des différents types d'estimateurs d'erreur. On s'intéressera particulièrement à l'état de l'art de l'extension de ceux-ci aux problèmes tridimensionnels et non linéaires incompressibles.

Dans le chapitre 3 nous aborderons l'aspect adaptation de maillage. Nous décrivons de manière générale les principales techniques de génération de maillages tétraédriques. Un intérêt particulier sera dédié au mailleur topologique développé au CEMEF et que nous utiliserons dans le cadre de ce travail. Nous finirons le chapitre par la présentation de deux stratégies d'adaptation de maillage.

Dans le cadre de l'estimateur d'erreur de type Z^2 , nous étudions, dans le chapitre 4, les techniques de recouvrement SPR (Superconvergent Patch Recovery), REP (Recovery by Equilibrium in Patches) et la technique de différences finies locales (Liszka-Orkisz). Nous

¹ L'étude *Technologies clés 2005* publiée par la DiGITIP en octobre 2000 décrit 119 technologies clés pour l'économie française à l'horizon de 2005

proposons quelques améliorations successibles d'augmenter leur efficacité et nous développons une variante de la technique SPR qu'on appellera technique MPR (Minimal Patch Recovery).

Les estimateurs développés dans le chapitre 4, sont étudiés (chapitre 5) dans le cadre de comportements élastique linéaire et viscoplastique incompressible. L'étude reposera sur des expérimentations numériques basées sur la comparaison à une solution analytique (en élasticité) et des solutions numériques projetées (en viscoplasticité).

Le chapitre 6 est dédié à la validation de la procédure du remaillage adaptatif sur des applications purement industrielles. Nous décrivons une stratégie d'optimisation de maillage et nous montrons sa fiabilité et sa robustesse à travers les différentes applications.

Chapitre 1

Problème mécanique: formulation et méthode de résolution

Résumé:

Dans ce premier chapitre on se propose de présenter les différents éléments de la modélisation mathématique et numérique du problème mécanique relatif à la mise en forme des matériaux dans le cadre du logiciel Forge3[®]. La première partie sera consacrée à l'introduction du modèle mathématique du problème de forgeage. Ensuite nous présentons les principales équations de sa discrétisation par la méthode des éléments finis. Enfin nous donnons une description succincte des méthodes de résolution utilisées.

1.1 Modélisation mécanique du forgeage

À l'échelle macroscopique, on assimile le métal à forger, occupant un domaine fini Ω , à un milieu continu et homogène. Le modèle mathématique du problème est donc basé sur les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, à savoir l'équation de conservation de la matière et l'équation de l'équilibre dynamique. Pour que le problème soit correctement posé, des équations relatives aux conditions aux limites sont introduites. Finalement, afin de modéliser les mécanismes régissant la déformation et la transformation du matériau, des équations de loi de comportement seront également rajoutées. Celles-ci permettront par exemple de lier les contraintes aux vitesses de déformation au cours de l'écoulement de la matière.

1.1.1 Equation de l'équilibre dynamique

Pour un solide occupant un domaine fini Ω , l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\text{div}\sigma + F_v = \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (\text{Grad}v)v \right] \quad (1.1)$$

où σ est le tenseur symétrique des contraintes, ρ est la masse volumique du matériau, v est la vitesse de la matière, t est le temps et F_v désigne les efforts volumiques décrivant les forces de la gravité.

Pour le problème de la mise en forme de matériaux, il est courant de faire les deux hypothèses suivantes :

- les forces de la gravité sont négligeables devant les efforts de la plasticité :

Soit σ_0 la contrainte d'écoulement d'un lopin en acier de hauteur h , et g est l'accélération de la pesanteur, on suppose alors :

$$\frac{\rho h g}{\sigma_0} \ll 1 \quad (1.2)$$

En effet, pour les aciers σ_0 est de l'ordre de 10^8 Pa, la masse volumique est de l'ordre de 6.10^3 Kg m^{-3} . Si $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ alors la hauteur du lopin h doit atteindre 100 mètres pour que les forces de gravité soient de l'ordre de seulement 6% de la contrainte d'écoulement de l'acier.

- les forces d'inerties sont aussi négligeables devant les efforts de la plasticité :

Soit v la vitesse de la matière, on suppose alors :

$$\frac{\rho v^2}{\sigma_0} \ll 1 \quad (1.3)$$

Pour que les forces d'inerties soient de l'ordre de 10% des forces de plasticité il faut que la vitesse de la matière atteigne 41m/s !

Ces deux hypothèses reviennent à dire qu'au cours du procédé de forgeage, le matériau se déforme uniquement sous l'effet des forces imposées par les outillages. L'équation d'équilibre du problème mécanique s'écrit finalement:

$$\text{div}\sigma = 0 \quad (1.4)$$

Le logiciel Forge3[®] offre la possibilité de tenir compte des termes de gravité et d'inertie afin de pouvoir simuler et étudier des problèmes particuliers. Par souci de simplicité nous ne rentrons pas ici dans les détails de la formulation de ces termes.

1.1.2 Equation de l'incompressibilité

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.5)$$

En considérant, d'une part, l'hypothèse de cas stationnaire, la dérivée par rapport au temps de la masse volumique s'annule. D'autre part, si on suppose que le matériau est parfaitement *incompressible* (on néglige sa déformation élastique), ce qui revient à dire que sa masse volumique est constante, l'équation de l'incompressibilité découle de l'équation de conservation de la masse et s'écrit :

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.6)$$

1.1.3 Les conditions aux limites

On désigne par $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la frontière du volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ occupé par le matériau à forger, qu'on appelle *lopin*. Cette frontière peut être décomposée en plusieurs parties disjointes (voir figure 1.1) : une frontière libre notée $\partial_l\Omega$, une frontière à chargement imposé et notée $\partial_T\Omega$, une frontière à vitesse imposée notée $\partial_v\Omega$ et une frontière en contact avec les outils notée $\partial_c\Omega$.

$$\partial\Omega = \partial_l\Omega \cup \partial_T\Omega \cup \partial_v\Omega \cup \partial_c\Omega \quad (1.7)$$

- sur la frontière libre $\partial_l\Omega$ on écrit que la contrainte normale est nulle :

$$\sigma \mathbf{n} = 0 \quad (1.8)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante à la surface de la pièce (voir figure 1.1).

- sur la frontière chargée $\partial_T\Omega$ on écrit que la contrainte normale est égale au vecteur contrainte imposée \mathbf{T} :

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{T} \quad (1.9)$$

- sur la frontière $\partial_v\Omega$, on écrit que la vitesse est égale à la vitesse imposée \mathbf{v}_0 .
- sur la frontière $\partial_c\Omega$ on considère deux types de conditions imposées :
 - une condition relative au contact de type unilatéral entre la pièce et les outils : ce type de contact est décrit par les conditions de Signorini :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{out}}) \cdot \mathbf{n} &\leq \delta \\ (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \sigma_n &\leq 0 \\ \left[(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{out}}) \cdot \mathbf{n} - \delta \right] \sigma_n &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

où u^{out} est le déplacement de l'outil, σ_n est la pression de contact et δ est une distance de pénétration calculée dans la direction normale de l'outil. En effet, Au cours d'un incrément de calcul, un nœud de la zone de contact peut quitter le contact ou pénétrer dans l'outil :

$$\begin{cases} \text{nœud intérieur à l'outil:} & \delta < 0 \\ \text{nœud à la surface de l'outil:} & \delta = 0 \\ \text{nœud à l'extérieur de l'outil:} & \delta > 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

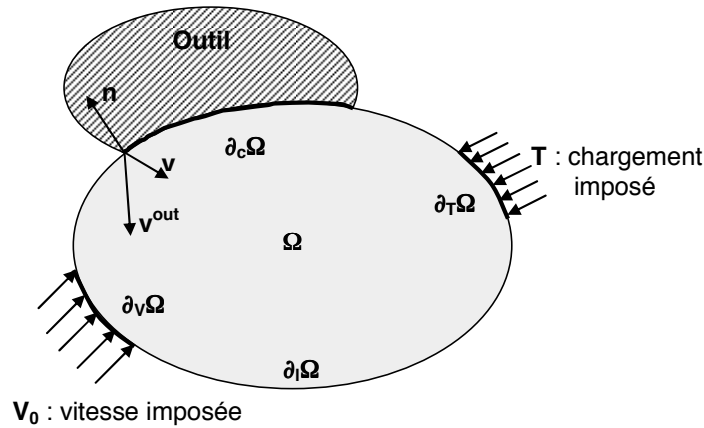


Figure 1.1 : Conditions aux limites

- une condition relative au frottement entre la pièce et les outils. Elle est écrite dans la direction tangentielle et permet d'introduire la cission de frottement τ :

$$\tau = \sigma n - (\sigma n \cdot n) n \quad (1.12)$$

Cette cission est associée à une loi de frottement qui sera introduite dans le paragraphe suivant.

1.1.4 Les lois de comportement

1.1.4.1 Lois rhéologiques

Les lois rhéologiques sont des modélisations de l'écoulement de la matière au cours de sa mise en forme. Pour établir un modèle rhéologique fiable, le comportement du matériau face à différentes sollicitations mécaniques et thermiques est analysé afin de dresser le bilan des paramètres qui caractérisent son comportement. Une loi rhéologique est généralement représentée sous forme d'une relation reliant la contrainte σ à la déformation ϵ , la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ et la température T° :

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, T^\circ, P) \quad (1.13)$$

P est l'ensemble des coefficients intervenant dans la loi rhéologique appelés «paramètres rhéologiques». La fiabilité d'une loi dépend de la forme de la relation (1.13) et de l'ensemble des paramètres P .

Le tenseur des contraintes est décomposé en une partie déviatorique s et une partie sphérique pI :

$$\sigma = s - pI \quad (1.14)$$

s est le déviateur des contraintes, I est le tenseur identité et p est la pression hydrostatique définie par:

$$p = -\frac{1}{3} \text{trace}(\sigma) \quad (1.15)$$

Le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}$ s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}(v) + \text{grad}(v)^t \right) \quad (1.16)$$

Des représentations unidimensionnelles de la contrainte et de la déformation sont données par :

- la contrainte équivalente de Von Mises :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} \quad (1.17)$$

- le taux de déformation généralisé :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}} \quad (1.18)$$

- la déformation équivalente :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}} dt \quad (1.19)$$

Selon la température du procédé on distingue différents types de lois rhéologiques. Pour les procédés à chaud la déformation élastique est souvent négligée et le comportement du matériau est modélisé par une loi viscoplastique. Dans le cas de procédé à froid l'élasticité ne peut pas être négligée, des lois de type élastoplastique, élasto-viscoplastique ou thermo-élasto-viscoplastique sont considérées.

- a - Élasticité

L'élasticité se manifeste par un comportement linéaire et réversible. La rhéologie d'un matériau linéaire élastique et isotrope est représentée par la loi de Hooke :

$$\dot{\sigma} = C \cdot \dot{\varepsilon}^{\text{el}} = 2\mu \dot{\varepsilon}^{\text{el}} + \lambda \text{trace}(\dot{\varepsilon}^{\text{el}})I \quad (1.20)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont constants pour un matériau homogène :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.21)$$

E est le module de Young et ν est le coefficient de poisson, $\dot{\epsilon}^{el}$ est la vitesse de déformation élastique et $\dot{\sigma}$ est la dérivée particulaire du tenseur des contraintes.

Remarque

Sous l'hypothèse des petites déformations nous utilisons la dérivée particulaire du tenseur des contraintes σ et non la dérivée objective (telle que la dérivée au sens de Jaumann).

La forme inverse de la loi de Hooke s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^{el} = C^{-1} \dot{\sigma} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\dot{\sigma}) I \quad (1.22)$$

- b - Élastoplasticité

La loi de comportement élastoplastique modélise la rhéologie d'un matériau à froid. Le comportement élastoplastique peut être résumé de la manière suivante :

- tant que la contrainte σ est inférieure à une contrainte donnée σ_0 (contrainte d'écoulement) le matériau a un comportement purement élastique décrit par la loi de Hooke (1.20).
- dès que la contrainte atteint la valeur σ_0 le comportement du matériau contient une partie plastique. La vitesse de déformation totale se décompose en la somme d'une déformation élastique et une déformation plastique :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \quad (1.23)$$

La partie élastique de la vitesse de déformation est calculée par la loi de Hooke (1.22).

Cette additivité des déformations est bien vérifiée pour les métaux où les déformations élastiques sont petites face aux déformations plastiques. La contrainte d'écoulement σ_0 est la contrainte nécessaire pour provoquer une déformation plastique. Celle-ci est généralement déterminée par un essai de traction uni-axiale d'une éprouvette métallique.

Critère de plasticité :

Le comportement élastoplastique est résolu par la loi de Prandtl-Reuss avec le critère de Von Mises. Le critère de plasticité est défini par une surface de charge f . Pour un matériau isotrope et écrouissable il fait intervenir le tenseur des contraintes σ et la contrainte d'écoulement σ_0 :

$$f(\sigma, \sigma_0) \leq 0 \quad (1.24)$$

Le comportement plastique apparaît lorsque la contrainte σ annule le critère (1.24).

Ainsi, le critère de plasticité délimite le domaine d'élasticité :

$$\begin{aligned} f(\sigma, \sigma_0) < 0 & : \text{Comportement élastique} \\ f(\sigma, \sigma_0) = 0 & : \text{Comportement plastique} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Selon le critère de Von Mises, la surface de charge f est représentée par l'équation d'un cylindre à base circulaire de rayon $R = \sigma_0$ et axé sur la trisectrice du repère des contraintes principales ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$):

$$f = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 - 2\sigma_0^2 \quad (1.26)$$

On démontre que dans un repère quelconque (x, y, z) le critère de Von Mises s'écrit :

$$f = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{yz}^2 + 6\sigma_{xz}^2 - 2\sigma_0^2 \quad (1.27)$$

où encore en utilisant la décomposition (1.14) des contraintes principales le critère (1.26) s'écrit :

$$f = 3(s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2) - 2\sigma_0^2 \quad (1.28)$$

L'écoulement plastique apparaît donc si :

$$\frac{2}{3}\sigma_0^2 = \text{trace}(s^2) = s : s \quad (1.29)$$

En utilisant la définition de la contrainte équivalente (1.17) l'équation (1.29) s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \quad (1.30)$$

La fonction f du critère de plasticité s'écrit finalement sous la forme simple :

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_0 \quad (1.31)$$

Loi d'écoulement plastique : règle de normalité

En plasticité associée, le taux de déformation plastique est défini par la loi d'écoulement :

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (1.32)$$

L'écoulement plastique se produit dans la direction normale à la surface de plasticité avec une intensité donnée par le scalaire $\dot{\lambda}^{pl}$.

La déformation plastique étant incompressible, on écrit alors :

$$\text{trace}(\dot{\varepsilon}^{pl}) = 0 \quad (1.33)$$

Pour un matériau de Von Mises l'équation (1.32) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma_0} \quad (1.34)$$

et le déviateur des contraintes pour un matériau plastique est donné par :

$$s = \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}^{pl}} \quad (1.35)$$

En résumé, les équations de l'élastoplasticité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \\ \dot{\epsilon}^{el} = D^{-1} \dot{\sigma} \\ \dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda}^{pl} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ f(\sigma, \sigma_0) = 0 \end{array} \right. \quad (1.36)$$

- c - Viscoplasticité

Afin de modéliser l'écoulement de la matière à chaud il est très souvent légitime de négliger la composante élastique de la déformation et de considérer un modèle de matériau viscoplastique. La thermodynamique des milieux continus met en évidence l'existence d'un potentiel viscoplastique φ reliant le tenseur déviateur des contraintes s à la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}$:

$$s = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\epsilon}} \quad (1.37)$$

Dans le cadre du logiciel Forge3[®] un exemple est donné par le potentiel viscoplastique de Norton-Hoff :

$$\varphi = \frac{K}{m+1} \left(\sqrt{3} \dot{\epsilon} \right)^{m+1} \quad (1.38)$$

où K est la consistance du matériau et m est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation.

A partir de (1.18), (1.37) et (1.38) on déduit la loi de comportement de Norton-Hoff :

$$s = 2K \left(\sqrt{3} \dot{\epsilon} \right)^{m-1} \dot{\epsilon} = \mu(\dot{\epsilon}) \dot{\epsilon} \quad (1.39)$$

$\mu(\dot{\epsilon})$ est le terme de viscosité de la loi de Norton-Hoff.

La contrainte équivalente est donnée par la loi puissance :

$$\bar{\sigma} = K \sqrt{3} (\sqrt{3} \dot{\epsilon})^m \quad (1.40)$$

Pour $m=0$ dans la loi de Norton-Hoff (1.39) on retrouve l'expression du déviateur des contraintes s pour un matériau rigide plastique (1.35) avec σ_0 donnée par (1.40). Pour $m=1$ la loi devient linéaire et le matériau est dit Newtonien. Pour les métaux m est généralement inférieur à 0,3.

Pour un matériau thermo-écrouissable, l'écrouissage est décrit par la consistance K qui peut dépendre de la température. Dans le logiciel Forge3[®], un modèle de matériau thermo-écrouissable est défini, à titre d'exemple, par une loi puissance reliant la consistance du matériau à la déformation équivalente et la température T :

$$K(T, \bar{\epsilon}) = K_0 (\bar{\epsilon} + \epsilon_0)^n \exp\left(\frac{\beta}{T}\right) \quad (1.41)$$

où K_0 est une constante, n est le coefficient de sensibilité à l'écrouissage, β est le coefficient de sensibilité à la température, $\bar{\epsilon}$ est la déformation équivalente et ϵ_0 est le terme de régulation de l'écrouissage.

- d - Élasto-viscoplasticité

Par le même principe du cas de comportement élastoplastique, le tenseur des vitesses de déformation se décompose en une composante élastique et une composante viscoplastique :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp} \quad (1.42)$$

avec :

$$\dot{\epsilon}^{el} = C^{-1} \dot{\sigma} \quad (1.43)$$

et la vitesse de déformation viscoplastique peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{s}{\bar{\sigma}} \quad (1.44)$$

Considérant l'expression de la contrainte équivalente (1.40) de la loi de Norton-Hoff l'équation (1.44) devient:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \dot{\epsilon} \frac{s}{\bar{\sigma}} \quad (1.45)$$

C'est une loi de type Norton-Hoff sans seuil. Dans le cas d'un comportement viscoplastique avec l'existence d'un seuil σ_0 la vitesse de déformation viscoplastique s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{si } \bar{\sigma} \geq \sigma_0 \quad \dot{\epsilon}^{vp} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\bar{\sigma} - \sigma_0}{K\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{s}{\bar{\sigma}} \\ \text{si } \bar{\sigma} < \sigma_0 \quad \dot{\epsilon}^{vp} &= 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

En passant à l'écriture déviatorique de la vitesse de déformation :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} - \frac{1}{3} \text{trace}(\dot{\epsilon}) I \\ \dot{\epsilon}^{el} = \dot{\epsilon}^{el} - \frac{1}{3} \text{trace}(\dot{\epsilon}^{el}) I \\ \dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\epsilon}^{vp} \quad (\text{Avec } \text{trace}(\dot{\epsilon}^{vp}) = 0) \\ \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp} \end{cases} \quad (1.47)$$

Par identification avec la loi de Hooke (1.20) et l'écriture déviatorique de la contrainte (1.14) et de la vitesse de déformation élastique dans (1.47) on peut écrire:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^{el} = \frac{\dot{s}}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s} \\ \dot{p} = \frac{E}{3(2\nu-1)} \text{trace}(\dot{\epsilon}^{el}) \\ \text{Avec: } -\frac{3\lambda+2\mu}{3} = \frac{E}{3(2\nu-1)} \end{cases} \quad (1.48)$$

Les équations de la viscoplasticité s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp} \\ \dot{\epsilon}^{el} = \frac{\dot{s}}{2\mu} + \frac{2\nu-1}{E} \dot{p} I \\ \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_0}{K\sqrt{3}} \right\rangle^{\frac{1}{m}} \frac{s}{\bar{\sigma}} \end{cases} \quad (1.49)$$

$\langle \cdot \rangle$ définit la partie positive.

- e - Thermo-élasto-viscoplasticité

Si on tient compte de la dilatation thermique du matériau (thermo-élasticité), une nouvelle composante thermique $\dot{\epsilon}^{th}$ de la vitesse de déformation est prise en compte :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp} + \dot{\epsilon}^{th} \quad (1.50)$$

avec :

$$\dot{\epsilon}^{th} = \alpha \dot{T} I \quad (1.51)$$

$$\text{et } \text{trace}(\dot{\epsilon}^{th}) = 3\alpha \dot{T} \quad (1.52)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique et \dot{T} est la vitesse de refroidissement.

Pour des raisons de simplicité nous ne rentrerons pas dans les détails de la formulation du couplage thermomécanique. Pour plus de détails sur cet aspect le lecteur est invité à consulter par exemple [Aliaga 00].

1.1.4.2 Lois de frottement

Les lois de frottement permettent de modéliser le frottement sur les interfaces de contact entre deux corps lorsqu'un mouvement de glissement relatif apparaît entre eux. Dans le logiciel Forge3[®], différentes lois de frottement sont disponibles modélisant le frottement à l'interface entre la pièce et les outils de forgeage :

- a - Loi de frottement viscoplastique (ou loi puissance)

Cette loi reliant la cission de frottement τ à la vitesse relative de glissement Δv_g s'écrit:

$$\tau = -\alpha_f K(T^\circ, \bar{\varepsilon}) \|\Delta v_g\|^{q-1} \Delta v_g \quad (1.53)$$

avec :

$$\Delta v_g = (v - v^{\text{outil}}) - [(v - v^{\text{outil}}) \cdot n] n \quad (1.54)$$

où α_f est le coefficient de frottement et q est le coefficient de sensibilité à la vitesse de glissement. Cette loi est souvent utilisée en forgeage à chaud avec de fortes pressions de contact.

- b - Loi de frottement de Tresca

La loi de Tresca dérive des lois de comportement plastiques incompressibles. Elle relie la cission de frottement τ à la contrainte d'écoulement du matériau σ_0 :

$$\tau = -\bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\Delta v_g}{\|\Delta v_g\|} \quad \text{avec } 0 \leq \bar{m} \leq 1 \quad (1.55)$$

où \bar{m} est le coefficient de frottement de Tresca.

- c - Loi de frottement de coulomb

La loi de type Coulomb relie la cission critique de frottement à la pression de contact p_c :

$$\tau_c = \mu p_c \frac{\Delta v_g}{\|\Delta v_g\|} = -\mu \sigma_n \frac{\Delta v_g}{\|\Delta v_g\|} \quad (1.56)$$

- d - Loi de Coulomb limitée par la loi de Tresca

$$\tau = -\mu \sigma_n \frac{\Delta v_g}{\|\Delta v_g\|} \quad \text{si } |\mu \sigma_n| < \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \tau = -\bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\Delta v_g}{\|\Delta v_g\|} \quad \text{si } |\mu \sigma_n| \geq \bar{m} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (1.57)$$

1.1.5 Le problème mécanique à résoudre

Regroupant les équations présentées précédemment, le problème mécanique continu à résoudre s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = \operatorname{div} s - \operatorname{grad} p = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.58)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = -\frac{3\dot{p}}{3\lambda + 2\mu} & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (1.59)$$

$$\begin{cases} (u - u^{\text{outil}}) \cdot n \leq \delta & \text{sur } \partial_c \Omega \end{cases} \quad (1.60)$$

À ce système s'ajoutent les lois de comportement et de frottement qui sont introduites dans l'écriture de la formulation faible du problème continue.

Si on néglige la composante élastique de la déformation, le matériau devient parfaitement incompressible et l'équation (1.59) devient :

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.61)$$

1.2 Discrétisation du problème mécanique

1.2.1 Formulation faible

En utilisant le Principe des Puissances Virtuelles (PPV) on obtient la formulation faible *mixte* en vitesse et pression (\mathbf{v}, p) du problème mécanique :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{v}, p) \in (V^{ca}, P) \text{ tel que } \forall (\mathbf{v}^*, p^*) \in (V_0^{ca}, P) \\ \int_{\Omega} \mathbf{s}(\mathbf{v}) : \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v}^*) d\omega - \int_{\Omega} p \cdot \text{div } \mathbf{v}^* d\omega - \int_{\partial_c \Omega} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \\ \int_{\Omega} p^* \left(\text{trace}(\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v})) + \frac{3\dot{p}}{3\lambda + 2\mu} \right) d\omega = 0 \end{array} \right. \quad (1.62)$$

où V^{ca} (respectivement V_0^{ca}) est l'espace des vitesses cinématiquement admissibles (respectivement cinématiquement admissibles à 0) et P est l'espace des pressions p . Soit V un sous-espace de $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} V^{ca} &= \left\{ \mathbf{v} \in V / (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{\text{outil}}) \cdot \mathbf{n} \leq \delta \text{ sur } \partial_c \Omega \right\} \\ V_0^{ca} &= \left\{ \mathbf{v} \in V^{ca} / \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \partial_c \Omega \right\} \\ P &= L^2(\Omega) \end{aligned} \quad (1.63)$$

Dans le cas général de la loi de Norton-Hoff (1.39), l'espace V est alors l'espace de Sobolev :

$$V = W^{1,m+1}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^{m+1}(\Omega) / \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); \forall i = 1, 3 \right\} \quad (1.64)$$

Considérant la loi rhéologique (1.39) et la loi de frottement (1.53) la formulation s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{v}, p) \in (V^{ca}, P) \text{ tel que } \forall (\mathbf{v}^*, p^*) \in (V_0^{ca}, P) \\ \int_{\Omega} 2K \left(\sqrt{3\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v})} \right)^{m-1} \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) : \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v}^*) d\omega - \int_{\Omega} p \cdot \text{div } \mathbf{v}^* d\omega + \int_{\partial_c \Omega} \alpha_f K \left\| \mathbf{v}_g \right\|^{q-1} \Delta \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \\ \int_{\Omega_h} p^* \left(\text{trace}(\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{v})) + \frac{3\dot{p}}{3\lambda + 2\mu} \right) d\omega = 0 \end{array} \right. \quad (1.65)$$

1.2.2 Discrétisation spatiale

La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine Ω_h , qui est une approximation de Ω , en des sous domaines. On définit ainsi une triangulation, ou maillage

éléments finis du domaine Ω_h notée T_h . Ω_h^e est le volume d'un élément e du maillage T_h tel que :

$$\Omega_h = \bigcup_{e \in T_h} \Omega_h^e \quad (1.66)$$

Pour $i \neq j$ l'ensemble $\Omega_h^i \cap \Omega_h^j$ est vide ou contient un sommet ou une arête ou une face.

On définit V_h^{ca} et P_h les approximations des espaces V^{ca} et P contenant la solution (v_h, p_h) du problème discret. L'existence et l'unicité de cette solution sont assurées si les espaces d'approximation vérifient la condition de compatibilité de Brezzi-Babuška [Babuška 73]. Cette condition assure aussi la convergence de la solution (v_h, p_h) vers celle du problème continu (v, p) quand la taille des éléments h tend vers 0. Dans le logiciel Forge3[®] les éléments finis Ω_h^e utilisés sont des tétraèdres de type $P1^+/P1$. Il s'agit d'un élément fini mixte tétraédrique (voir figure 1.2). Pour plus de détails sur le choix de cette formulation et la nature des éléments le lecteur est invité à consulter [Coupez 91], et pour la comparaison et la validation de quelques formulations [Perchat 00]. Les champs de vitesse et de pression sont ainsi interpolés linéairement à partir des valeurs aux quatre sommets du tétraèdre. Le champ de vitesse est enrichi par l'ajout d'un degré de liberté supplémentaire (fonction bulle: b_h) au centre du tétraèdre pour assurer la compatibilité de l'élément $P1^+/P1$ (de Brezzi-Babuška). La fonction bulle est linéaire continue sur les sous-tétraèdres et elle s'annule sur les faces du tétraèdre.

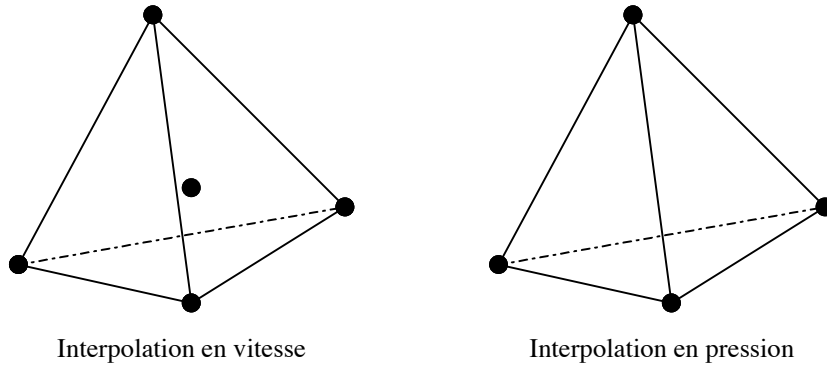


Figure 1.2: mini élément $P1^+/P1$

Les espaces d'approximation sont ainsi donnés par :

$$\begin{aligned} P_h &= \left\{ p_h \in C^0(\Omega_h) / \forall e \in T_h, p_{h/\Omega_h^e} \in P1(\Omega_h^e) \right\} \\ V_h &= L_h \oplus B_h \\ L_h &= \left\{ v_h \in (C^0(\Omega_h))^3 / \forall e \in T_h, v_{h/\Omega_h^e} \in (P1(\Omega_h^e))^3 \text{ et } (v_h - v^{\text{outil}}) \cdot n \leq \delta \text{ sur } \partial_c \Omega \right\} \\ B_h &= \left\{ b_h \in (C^0(\Omega_h))^3 / \forall e \in T_h, b_{h/\Omega_{h,i}^e} \in (P1(\Omega_{h,i}^e))^3 \text{ et } b_h = 0 \text{ sur } \partial \Omega_i^e \right\} \end{aligned} \quad (1.67)$$

On note par $P1$ l'interpolation linéaire. $\Omega_{h,i}^e$ ($i = 1, 4$) sont les sous-tétraèdres du tétraèdre Ω_h^e

Les champs de vitesse et de pression discrets s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h &= \mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b = \sum_{i=1}^{Nbnoe} \mathbf{v}_i^l \mathbf{N}_i^l + \sum_{j=1}^{Nbelt} \mathbf{v}_j^b \mathbf{N}_j^b \\ p_h &= \sum_{i=1}^{Nbnoe} p_i \mathbf{N}_i^l \end{aligned} \quad (1.68)$$

où Nbnoe et Nbelt sont respectivement le nombre de nœuds et d'éléments dans le maillage. \mathbf{N}_i^l est la fonction d'interpolation d'ordre 1 associée au nœud i utilisée pour l'interpolation des champs de vitesse et de pression (vaut 1 au nœud i et 0 sur les autres nœuds de l'élément). \mathbf{N}_j^b est la fonction d'interpolation d'ordre 2 associée à l'élément j utilisée pour l'interpolation du terme bulle de champ de vitesse (vaut 1 au centre du sous-élément j et 0 sur la frontière de l'élément). Le problème relatif à la formulation (1.65) s'écrit donc :

$$\left| \begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{v}_h, p_h) \in (\mathbf{V}_h, P_h) \text{ tel que } \forall (\mathbf{v}_h^*, p_h^*) \in (\mathbf{V}_h^0, P_h) \\ &\left\{ \begin{aligned} &\int_{\Omega_h} 2K \left(\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h) \right)^{m-1} \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h) : \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^*) d\omega - \int_{\Omega_h} p \cdot \text{div } \mathbf{v}_h^* d\omega + \int_{\partial_c \Omega_h} \alpha_f K \left\| \mathbf{v}_{hg} \right\|^{q-1} \Delta \mathbf{v}_{hg} \cdot \mathbf{v}_h^* ds = 0 \\ &\int_{\Omega_h} p_h^* \left(\text{trace}(\dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h)) + \frac{3\dot{p}_h}{3\lambda + 2\mu} \right) d\omega = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (1.69)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h^0 &= \mathbf{L}_h^0 \oplus \mathbf{B}_h \\ \mathbf{L}_h^0 &= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{L}_h / \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \partial_c \Omega_h \right\} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Considérant la décomposition du champ de vitesse donnée par (1.68) :

$$\left| \begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{v}_h, p_h) \in (\mathbf{V}_h, P_h) \text{ tel que } \forall (\mathbf{v}_h^*, p_h^*) \in (\mathbf{V}_h^0, P_h) \\ &\left\{ \begin{aligned} &\int_{\Omega_h} 2K \left(\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b) \right)^{m-1} \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b) : \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^{l*}) d\omega - \int_{\Omega_h} p \cdot \text{div } \mathbf{v}_h^{l*} d\omega + \\ &\int_{\partial_c \Omega_h} \alpha_f K \left\| \mathbf{v}_{hg} \right\|^{q-1} \Delta \mathbf{v}_{hg} \cdot \mathbf{v}_h^{l*} ds = 0 \\ &\int_{\Omega_h} 2K \left(\sqrt{3} \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b) \right)^{m-1} \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b) : \dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^{b*}) d\omega - \int_{\Omega_h} p \cdot \text{div } \mathbf{v}_h^{b*} d\omega = 0 \\ &\int_{\Omega_h} p_h^* \left(\text{trace}(\dot{\bar{\epsilon}}(\mathbf{v}_h^l + \mathbf{v}_h^b)) + \frac{3\dot{p}_h}{3\lambda + 2\mu} \right) d\omega = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (1.71)$$

Le terme de frottement n'apparaît pas dans la deuxième équation puisque le champ bulle s'annule sur la frontière.

1.2.3 Discrétisation temporelle

Le système d'équations de la formulation faible sous sa forme discrète présentée dans le paragraphe précédent doit être satisfait à chaque instant de la discrétisation dans le schéma retenu. Pour cela on discrétise l'espace temps en N incréments définis par des pas de temps Δt^i :

$$T^{\text{tot}} = \bigcup_{i=1,N} [t^i, t^i + \Delta t^i] \quad (1.72)$$

À l'instant t la configuration Ω^t est connue, on calcule la solution (v^t, p^t) qui vérifie l'équilibre à cet instant. Le formalisme modélisant l'évolution de la matière au cours du temps est de type lagrangien réactualisé. La nouvelle configuration à l'instant $(t+\Delta t)$ est calculée à partir de la configuration à l'instant t . Soit $x(t)$ la position d'un point matériel à un instant t . L'équation d'évolution du problème s'écrit :

$$v = \frac{dx(t)}{dt} \quad (1.73)$$

Pour intégrer cette équation un schéma d'Euler implicite est utilisé :

$$\forall t, x_h^{t+\Delta t} = x_h^t + v_h^{t+\Delta t} \Delta t \quad (1.74)$$

et par la suite :

$$\forall t, \Omega^{t+\Delta t} = \Omega^t + v^{t+\Delta t} \Delta t \quad (1.75)$$

Le problème discret à l'instant $(t + \Delta t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_h^{t+\Delta t}, p_h^{t+\Delta t}) \in (V_h, P)_h \text{ tel que } \forall (v_h^*, p_h^*) \in (V_h^0, P_h) \\ \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} 2K \left(\sqrt{3} \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} (v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} (v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon} (v_h^{l*}) d\omega - \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p^{t+\Delta t} \cdot \text{div } v_h^{l*} d\omega + \\ \int_{\partial_c \Omega_h^{t+\Delta t}} \alpha_f K \left\| v_{hg}^{t+\Delta t} \right\|^{q-1} \Delta v_{hg}^{t+\Delta t} \cdot v_h^{l*} ds = 0 \\ \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} 2K \left(\sqrt{3} \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} (v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} (v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon} (v_h^{b*}) d\omega - \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p^{t+\Delta t} \cdot \text{div } v_h^{b*} d\omega = 0 \\ \int_{\Omega_h^{t+\Delta t}} p_h^* \left(\text{trace} \left(\dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} (v_h^l + v_h^b) \right) + \frac{3\dot{p}_h^{t+\Delta t}}{3\lambda + 2\mu} \right) d\omega = 0 \end{array} \right. \quad (1.76)$$

Un autre schéma peut être utilisé dans Forge3[®]. C'est un schéma d'ordre deux de type Runge-Kutta. Il consiste à calculer une configuration intermédiaire à l'instant $(t + \Delta t/2)$ par le schéma d'Euler décrit précédemment :

$$\Omega^{t+\Delta t/2} = \Omega^t + v^{t+\Delta t/2} \Delta t/2 \quad (1.77)$$

La configuration à l'instant $(t + \Delta t)$ est cette fois calculée considérant le champ de vitesse calculé à l'instant $(t + \Delta t)$:

$$\Omega^{t+\Delta t} = \Omega^t + v^{t+\Delta t} \Delta t \quad (1.78)$$

Avec ce schéma l'erreur commise est proportionnelle à $(\Delta t)^3$ alors qu'en utilisant le schéma d'intégration d'Euler elle est proportionnelle à $(\Delta t)^2$. Il permet donc d'obtenir une meilleure précision [Boyère 99]. Traoré [Traoré 01] a montré qu'en laminage circulaire le schéma d'Euler génère des pertes de précision et d'importantes variations de volume de la pièce. Pour ce type de procédé l'utilisation du schéma de type Runge-Kutta permet d'améliorer la solution.

1.2.4 Traitement du contact

On utilise une formulation avec contact nodal, la condition de contact unilatéral est imposée en chaque nœud potentiellement en contact de la surface de l'outil :

$$(u^{t+\Delta t} - u^{\text{outil}}) \cdot n^{t+\Delta t} - \delta^{t+\Delta t} \leq 0 \quad (1.79)$$

$$\text{avec} \quad \delta^{t+\Delta t} \geq 0 \quad (1.80)$$

où $u^{t+\Delta t}$ et $n^{t+\Delta t}$ sont respectivement le déplacement et la normale de l'outil à l'instant $t+\Delta t$.

Une approximation à l'ordre 1 de $\delta^{t+\Delta t}$ à partir de δ^t permet d'écrire la nouvelle condition de contact unilatéral :

$$(u^{t+\Delta t} - u^{\text{outil}}) \cdot n^t - \frac{\delta^t}{\Delta t} \leq 0 \quad (1.81)$$

où n^t et δ^t sont respectivement la normale de l'outil et la valeur de la pénétration à l'incrément t . Ces deux paramètres de contact sont supposés constants au cours de l'incrément de calcul. Pour plus de détails sur cette partie ainsi que les différentes techniques de gestion du contact le lecteur est invité à consulter [Mocellin 99] et [Barboza 04].

Dans la formulation discrète du problème de forgeage cette condition est prise en compte par une technique de pénalisation. Cela revient à introduire un facteur de pénalisation ρ dans l'équation de la condition de contact. La formulation faible tenant compte de la condition de contact s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_h, p_h) \in (V_h, P_h) \text{ tel que } \forall (v_h^*, p_h^*) \in (V_h^0, P_h) \\ \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} 2K \left(\sqrt{3} \dot{\epsilon} (v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\epsilon} (v_h^l + v_h^b) : \dot{\epsilon} (v_h^{l*}) d\omega - \int_{\Omega_h} p \cdot \text{div } v_h^{l*} d\omega + \\ \int_{\partial_c \Omega_h} \alpha_f K \|v_h^g\|^{q-1} \Delta v_h^g \cdot v_h^{l*} ds + \rho \sum_{k \in \partial_c \Omega_h} [(v_h^k - v^{\text{outil}}) \cdot n^k - \frac{\delta^k}{\Delta t}]^+ S_k v_h^* \cdot n = 0 \\ \int_{\Omega_h} 2K \left(\sqrt{3} \dot{\epsilon} (v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\epsilon} (v_h^l + v_h^b) : \dot{\epsilon} (v_h^{b*}) d\omega - \int_{\Omega_h} p \cdot \text{div } v_h^{b*} d\omega = 0 \\ \int_{\Omega_h} p^* \left(\text{trace} \left(\dot{\epsilon} (v_h^l + v_h^b) \right) + \frac{3\dot{p}}{3\lambda + 2\mu} \right) d\omega = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.82)$$

avec la notation : $[x]^+ = \frac{x + |x|}{2}$ et S_k est la surface associée au nœud k , utilisée pour affecter un poids plus fort aux nœuds liés à des faces frontières de plus grande surface :

$$S_k = \int_{\partial_c \Omega_h} N_k ds \quad (1.83)$$

Cette dernière formulation offre les équations du problème discret à résoudre. Dans ce qui suit, nous décrivons succinctement le schéma numérique de sa résolution.

1.3 Résolution numérique du problème discret

Le système d'équations du problème obtenu précédemment peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} R^l(v_h^l, v_h^b, p_h) = 0 \\ R^b(v_h^l, v_h^b, p_h) = 0 \\ R^p(v_h^l, v_h^b, p_h) = 0 \end{cases} \quad (1.84)$$

Ce problème non linéaire est résolu par la méthode de Newton-Raphson. À chaque itération on aboutit à la résolution d'un système linéaire de la forme $A.x = b$ défini par :

$$\begin{pmatrix} K^{ll} & 0 & K^{lp} \\ 0 & K^{bb} & K^{bp} \\ K^{pl} & K^{pb} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v^l \\ \Delta v^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^l(v_h^l, v_h^b, p_h) \\ R^b(v_h^l, v_h^b, p_h) \\ R^p(v_h^l, v_h^b, p_h) \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

où K est la matrice Hessienne ou de raideur définie par :

$$K^{ij} = \frac{\partial R^i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j} \quad \text{avec } (x_1, x_2, x_3) = (v_h^l, v_h^b, p_h) \quad (1.86)$$

$(\Delta v^l, \Delta v^b, \Delta p)$ sont les corrections apportées à la solution (v^l, v^b, p) de l'itération Newton-Raphson précédente.

Le système linéaire est d'abord simplifié par une technique de condensation statique qui aboutit à l'élimination du terme bulle et un meilleur conditionnement de la matrice de raideur [Perchat 00]. Il est ensuite résolu de manière itérative par la méthode de Résidu Minimal préconditionné. Une technique de stockage compact de la matrice du système est associée à la méthode de résolution permettant d'optimiser les coûts de calcul [Marie 97].

1.4 Remaillage et transport des variables

Au cours de l'opération de forgeage, le matériau subit des grandes déformations plastiques sous l'action des outils afin d'aboutir à la forme finale de la pièce généralement très complexe. Le but de la simulation numérique est de décrire avec la meilleure précision possible ces transformations géométriques subies par le matériau. Pour une formulation de type Lagrangienne, cas du logiciel Forge3[®], le maillage suit la matière et se déforme à sa suite tout le long du chemin de déformation. Le maillage initial, relatif à la forme simple du lopin, a

donc toutes les chances de dégénérer et la construction d'un nouveau maillage s'impose. Ceci nous amène au problème de remaillage. Cette opération indispensable à la continuité des calculs et de la simulation du procédé doit être totalement prise en charge par l'outil numérique afin de rendre la simulation numérique la plus systématique possible. On parle ainsi d'une procédure de remaillage adaptatif automatique. Suite à ce besoin, un générateur automatique de maillage a été développé [Coupez 91]. Il s'agit d'un mailleur topologique qui fonctionne par amélioration itérative de la topologie du maillage (cf. § 3.2.4).

Afin d'assurer la continuité des calculs après remaillage, des méthodes de transport des variables d'histoire de l'ancien au nouveau maillage ont été développées. En effet, on distingue deux types de variables d'histoires :

- variables nodales P1 : elles sont calculées et stockées aux nœuds du maillage comme la vitesse, la pression et la température.
- variables élémentaires P0 : elles sont calculées et stockées aux éléments du maillage (aux points de Gauss), généralement ce sont les variables d'état à savoir les vitesses de déformations, les contraintes, etc.

Deux types de transport sont donc nécessaires : un transport P1 pour les variables nodales et un transport P0 pour les variables élémentaires.

1.4.1 Transport P1

Le transport des variables nodales s'effectue en deux étapes :

- étape 1 : chaque nœud k de l'ancien maillage T_h est projeté sur le nouveau maillage T_h' . Il s'agit de chercher l'élément e du nouveau maillage qui contient le nœud k (figure 1.3)
- étape 2 : interpolation des valeurs nodales des sommets de l'élément d'appartenance trouvé au nœud k du nouveau maillage.

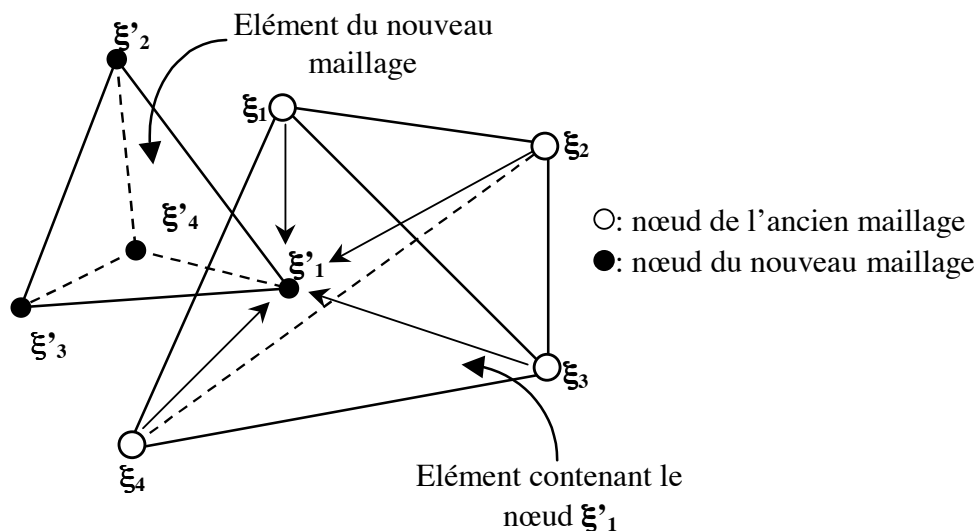


Figure 1.3 : transport P1

L'interpolation des valeurs nodales depuis les sommets de l'ancien maillage est effectuée en utilisant des fonctions de pondération calculée sur le nouveau maillage. Soit V la variable nodale P1 à transporter :

$$\forall k \in T_h', V_k' = \sum_{i \in e} V_i N(\xi_i) \quad (1.87)$$

où e est l'élément courant de l'ancien maillage, V_k' est la variable à calculer sur le nœud k du nouveau maillage T_h' et $(V_i)_{i=1,4}$ est la variable calculée au nœud i de l'ancien maillage. Les fonctions de pondération $(N(\xi_i))_{i=1,4}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} N(\xi_2) &= \frac{\det(\overrightarrow{\xi_1 \xi_1'}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_3}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_4})}{DET}, \quad N(\xi_3) = \frac{\det(\overrightarrow{\xi_1 \xi_2}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_1'}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_4})}{DET} \\ N(\xi_4) &= \frac{\det(\overrightarrow{\xi_1 \xi_2}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_3}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_1'})}{DET}, \quad N(\xi_1) = 1 - N(\xi_2) - N(\xi_3) - N(\xi_4) \end{aligned} \quad (1.88)$$

Avec $DET = \det(\overrightarrow{\xi_1 \xi_2}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_3}, \overrightarrow{\xi_1 \xi_4})$ et $\sum_{i=1}^4 N(\xi_i) = 1$

1.4.2 Transport P0

L'idée du transport P0 est de se ramener à un transport P1. Une première opération consiste à extrapoler aux nœuds de l'ancien maillage les variables stockées par élément de celui ci. Soit $W(x)$ ($x=(x_1, x_2, x_3)$) la variable P0 à transporter :

$$W(x) = \sum_{e=1}^{Nbelt} W_e 1^e(x) \quad (1.89)$$

$1^e(x)$ est la fonction indicatrice qui vaut 1 sur l'élément e et 0 ailleurs.

On veut approcher $W(x)$ par la variable nodale (P1) $\hat{W}(x)$ telle que :

$$\hat{W}(x) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} W_k N^k(x) \quad (1.90)$$

Pour cela une méthode de moindres carrés est utilisée. Elle consiste à minimiser la fonction suivante :

$$\Pi(W) = \sum_{e=1}^{Nbelt} vol^e \left(\sum_{k=1}^{Nbnoe} W_k N^k(\xi^e) - W_e \right)^2 \quad (1.91)$$

où $\xi^e = (\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e)$ sont les coordonnées barycentriques de l'élément e et vol^e est son volume.

La deuxième étape consiste à transporter la nouvelle variable nodale \hat{W} sur le nouveau maillage. Pour cela on effectue un transport P1 comme décrit précédemment en cherchant l'élément d'appartenance sur l'ancien maillage de chaque centre de gravité des éléments du nouveau maillage. Les valeurs nodales W_k sont ainsi transportées aux éléments du nouveau maillage.

Remarque :

Le transport P0 induit des diffusions numériques supplémentaires par rapport au transport P1 à cause de la première opération d'extrapolation (1.91). Mais il s'avère plus précis que si on faisait un transport P0 en projetant les centres de gravité des éléments du nouveau maillage sur les éléments de l'ancien maillage en considérant l'interpolation P0 discontinue.

Chapitre 2

Estimation d'erreur

Résumé:

Ce chapitre est consacré à l'étude d'estimation de l'erreur due à la discrétisation par la méthode des éléments finis. Nous développerons particulièrement les techniques d'estimation d'erreur *a posteriori* et nous présenterons les trois grandes familles d'estimateurs d'erreur : l'estimateur résiduel, l'estimateur d'erreur en relation de comportement et les estimateurs de types Zienkiewicz-Zhu. L'accent sera mis sur l'extension de ces estimateurs aux problèmes non linéaires et nous évoquerons le problème de choix d'un estimateur d'erreur pour les problèmes de mise en forme des matériaux.

2.1 Introduction

2.1.1 Définition de l'erreur

Au cours de la simulation numérique d'un problème physique on peut distinguer plusieurs origines à l'erreur qui font que la solution obtenue est différente de la solution exacte du problème étudié. Les principales sources d'erreurs sont :

- la modélisation mathématique du problème physique (les équations d'équilibres, les lois rhéologiques, les lois de frottement, les modèles des échanges thermiques, etc.). La qualité de la solution dépend du choix du modèle qui peut négliger des phénomènes physiques particuliers.
- entrée des données : erreurs utilisateur.
- la discrétisation spatiale du problème : c'est une source d'erreur intrinsèque à la méthode des éléments finis. Chaque discrétisation spatiale (maillage) du domaine considéré est associée à un niveau d'erreur qui dépend du pas de celle-ci (la taille h des éléments du maillage).
- la résolution numérique : erreurs d'intégration numérique liées au choix du schéma d'intégration, les erreurs d'arrondi, les erreurs de convergence, etc.
- la discrétisation temporelle (choix du pas de temps) : c'est une erreur qui s'apparente à l'erreur de discrétisation spatiale et à l'erreur d'intégration numérique.

Dans la suite de cette étude, on ne s'intéressera qu'à l'erreur de discrétisation spatiale, qu'on appellera erreur éléments finis, et qu'on notera e_h . Celle-ci est définie comme la différence entre la solution exacte et la solution éléments finis du problème discret.

Soient v et v_h respectivement le champ de vitesse exacte et éléments finis solutions du problème. L'erreur ponctuelle éléments finis pour le champ de vitesse s'écrit :

$$e_h^v = v - v_h \quad (2.1)$$

De la même manière on peut définir l'erreur ponctuelle sur le champ des contraintes :

$$e_h^\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (2.2)$$

où σ et σ_h sont respectivement le champ de contrainte exacte et éléments finis solutions du problème étudié.

Ces définitions ponctuelles de l'erreur sont rarement utilisées, on trouve dans la littérature quelques applications à l'étude de la convergence de l'erreur pour des problèmes d'élasticité [Zienkiewicz 92(I)], [Zienkiewicz 92(II)], [Boroomand 97(I)], [Boroomand 97(II)]. Pour des problèmes avec des géométries complexes ou présentant des singularités, ces définitions sont insuffisantes [Zienkiewicz 00]. Il est donc nécessaire d'exprimer l'erreur dans une norme adéquate.

2.1.2 Mesure de l'erreur

Le choix d'une norme dans laquelle l'erreur est exprimée dépend du problème étudié et de la grandeur que l'on souhaite contrôler. Si on veut mesurer l'erreur en terme d'énergie de

déformation du matériau ou des efforts appliqués au système, la norme la plus adéquate est ainsi la norme en énergie. Par contre si on s'intéresse à la géométrie de l'écoulement ou à la taille des bavures les normes L^2 et L^∞ semblent les mieux adaptées [Fourment 92]. Soulignons que dans le cas des problèmes linéaires ces normes sont équivalentes.

$$\text{Norme } L^2 : \quad \|v\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} v^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

$$\text{Norme } H^1 : \quad \|v\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} \left(v^2 + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \right) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

$$\text{Norme en énergie :} \quad \|v\|_E = \left(\int_{\Omega} \sigma(v) : \dot{\epsilon}(v) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

$$\text{Norme } W^{1,m+1} : \quad \|v\|_m = \left(\int_{\Omega} \left(|v|^{m+1} + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{m+1} \right) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Dans le cadre des problèmes de mise en forme des matériaux et de la mécanique de structure, l'erreur est généralement exprimée selon la norme en énergie 2.5 :

$$\|e_h\|_E = \left(\int_{\Omega} (\sigma(v) - \sigma(v_h)) : (\dot{\epsilon}(v) - \dot{\epsilon}(v_h)) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Pour un problème de viscoplasticité, et considérant la loi de type Norton-Hoff (1.38) l'erreur 2.7 s'écrit :

$$\|e_h\|_E = \left(\int_{\Omega} (s(v) - s(v_h)) : (\dot{\epsilon}(v) - \dot{\epsilon}(v_h)) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

$$= \left(\int_{\Omega} (\mu(\dot{\epsilon}))^{-1} (s(v) - s(v_h)) : (s(v) - s(v_h)) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

$$= \left(\int_{\Omega} \mu(\dot{\epsilon}) (\dot{\epsilon}(v) - \dot{\epsilon}(v_h)) : (\dot{\epsilon}(v) - \dot{\epsilon}(v_h)) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.10)$$

Notons que le terme de la pression n'apparaît pas dans l'expression de l'erreur en norme en énergie (2.8). En effet, pour un matériau incompressible il est d'usage de ne pas en tenir compte [Zienkiewicz 88]. Ceci est justifié du fait que le travail de la pression hydrostatique p est nul. D'autre part, dans [Zienkiewicz 89-a] les auteurs considèrent un matériau incompressible obéissant à une loi viscoplastique et montrent qu'il est possible de calculer

une erreur en norme en énergie très proche de l'erreur exacte sans tenir compte de la partie sphérique des contraintes.

Fourment [Fourment 92] a étudié la vitesse de convergence de la méthode des éléments finis selon les normes en énergie (2.8), (2.9) et (2.10). Les maillages utilisés sont uniformes et emboîtés avec des éléments triangulaires quadratiques et une pression sous-intégrée avec deux points de Gauss. Les résultats des trois normes s'avèrent comparables, bien que la norme (2.10) ait une vitesse de convergence plus faible. Finalement l'auteur suggère d'utiliser la norme (2.9) qui donne des résultats légèrement plus satisfaisants.

2.2 Méthodes d'estimation d'erreur

Jusqu'ici on a défini l'erreur de discrétisation comme étant la différence entre la solution exacte du problème et la solution éléments finis associée. Néanmoins, en pratique et pour la grande majorité des cas, la solution exacte est inconnue. Pour cela, et afin d'approcher celle-ci, des techniques d'estimation de l'erreur *a priori* et *a posteriori* ont été développées. On définit θ_h comme une estimation de l'erreur $\|e_h\|$ si :

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 / \alpha_1 \theta_h \leq \|e_h\| \leq \alpha_2 \theta_h \quad (2.11)$$

Dans ce qui suit nous étudions les principales techniques d'estimation d'erreur *a priori* et *a posteriori*.

2.2.1 Estimation d'erreur a priori

L'estimation d'erreur *a priori* est construite à partir des informations *a priori* sur la solution éléments finis (degrés des fonctions d'interpolation), la géométrie du domaine (les éventuelles singularités) et le maillage associé (la taille des éléments). L'objectif principal de cette estimation est la prédiction du taux de convergence asymptotique de l'erreur éléments finis. Dans la littérature plusieurs travaux ont été menés dans cette perspective [Romkes 03], [Cho 96], [Ciarlet 91], [Szabó 90]. Pour un problème mixte vitesse/pression, le choix des fonctions d'interpolation de la vitesse v et de la pression p doivent vérifier la condition de Brezzi-Babuška [Babuška 73], les estimations *a priori* sur v et p sont alors. Pour une loi de type viscoplastique le résultat théorique suivant est établi [Baranger 90] :

$$\|v_{ex} - v_h\|_{m+1} \leq C_v h^{1/2 p(m+1)} \quad (2.12)$$

$$\|p_{ex} - p_h\|_{1+1/m} \leq C_p h^{1/2 p[m(m+1)]} \quad (2.13)$$

où C_v et C_p sont deux constantes positives ne dépendant que des données du problème et de la solution exacte (v_{ex}, p_{ex}), m est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation de la loi viscoplastique, p est le degré des polynômes des fonctions d'interpolation utilisées et h est la taille maximale des éléments du maillage.

Pour évaluer la précision de la solution éléments finis à travers (2.12) et (2.13), la difficulté majeure réside dans la détermination des constantes C_v et C_p . Généralement des majorations de celles-ci donnent toujours une surestimation de l'erreur. Ce qui limite l'utilisation de l'estimation d'erreur *a priori* à l'étude de la convergence des solutions.

Le taux de convergence de la méthode peut être exprimé en fonction du nombre des degrés de liberté N dans le maillage et l'intensité λ d'une éventuelle singularité géométrique.

Pour une succession de raffinements uniformes de maillage, une estimation d'erreur a priori est donnée par : [Szabó 86], [Babuška 82]

$$\|e_h\|_E \leq C_1 N^{(-1/n) \min(p, \lambda)} \quad (2.14)$$

où n est la dimension de l'espace. C_1 est une constante ne dépendant que des données du problème. L'exposant $[(-1/n)\min(p, \lambda)]$ est le taux de convergence asymptotique de l'erreur.

L'intensité de la singularité λ dépend de la géométrie de celle-ci. Dans [Szabó 86] et [Zienkiewicz 00] les auteurs proposent des valeurs expérimentales pour quelques configurations géométriques 2D: par exemple au niveau d'un coin d'angle 90° , $\lambda=0,71$ et au niveau d'un front de fissure $\lambda=0,5$.

Pour un maillage adapté, et quand l'erreur est uniformément répartie, le taux de convergence devient indépendant de la singularité λ [Szabó 86], [Zienkiewicz 87]. Dans ce cas l'estimation d'erreur a priori est donnée par :

$$\|e_h\|_E \leq C_2 N^{-p/n} \quad (2.15)$$

Pour un problème tridimensionnel, N est proportionnel à h^{-3} ($N \approx h^{-2}$ en 2D), l'équation (2.15) devient donc :

$$\|e_h\|_E \leq C_3 h^p \quad (2.16)$$

Remarque

Le problème de taux de convergence de la méthode des éléments finis ainsi que la prise en compte des singularités géométriques sera développé dans le chapitre 3 (cf. § 3.5)

2.2.2 Estimation d'erreur a posteriori

Depuis les années 70 l'estimation d'erreur a posteriori a connu d'énormes progrès et a fait l'objet d'intenses efforts de recherche dans tous les domaines où l'on fait appel à la méthode des éléments finis pour la simulation numérique des différents types de problèmes. Dans la pratique elle trouve toute son importance en étant un moyen efficace permettant l'adaptation des calculs éléments finis et l'amélioration de la qualité des solutions obtenues. Cependant, elle est encore peu intégrée dans les logiciels de calculs. Les premiers travaux de recherche sur ce sujet ont été consacrés principalement aux problèmes linéaires 1D et 2D. Un premier estimateur a été proposé par Babuška et Rheinbold [Babuška 78]. Il est basé sur le calcul du résidu des équations d'équilibres pour un problème linéaire 1D. Une autre approche a été introduite par Ladevèze et al. [Ladevèze 86] qui utilisent la notion d'erreur en relation de comportement et des techniques de construction de champ statiquement admissibles. Plus tard Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 87] ont développé un estimateur pour un problème d'élasticité linéaire basé sur le calcul de l'écart entre la solution éléments finis et une solution lissée qui remplace la solution exacte dans le calcul de l'erreur (2.8). De nos jours ces trois principales approches de calcul d'erreur a posteriori ont été largement étudiées et des améliorations ont été proposées par plusieurs auteurs. Cependant, les applications consacrées à des problèmes non linéaires de viscoplasticité et d'élastoplasticité 3D s'avèrent encore restreintes. Dans ce qui suit nous présentons ces trois approches, et pour des raisons de simplicité on se mettra dans le cadre d'un problème d'élasticité tout en faisant l'état de l'art de leur extension pour les problèmes non linéaires qui est le cadre principal de notre travail.

2.2.2.1 Problème d'élasticité linéaire

Soit le problème d'élasticité linéaire suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} T = \sigma \cdot n = T^0 & \text{sur } \partial_T \Omega \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} u = u^0 & \text{sur } \partial_u \Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \sigma = C \varepsilon & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

où f représente les forces volumiques, T^0 et u^0 sont respectivement les efforts et les déplacements imposés sur les frontières $\partial_T \Omega$ et $\partial_u \Omega$. C le tenseur de la loi de Hooke défini dans (1.20)

La formulation faible du problème (2.17) s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in U^{\text{ca}} \text{ tel que } \forall u^* \in U_0^{\text{ca}} \\ \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u^*) d\omega - \int_{\Omega} f \cdot u^* d\omega - \int_{\partial_T \Omega} T^0 \cdot u^* ds = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où U^{ca} et U_0^{ca} sont respectivement l'ensemble des champs de déplacement sur Ω cinématiquement admissibles et cinématiquement admissibles à 0 :

$$\begin{aligned} U^{\text{ca}} &= \left\{ u \in (H^1(\Omega))^3 / u = u^0 \text{ sur } \partial_u \Omega \right\} \\ U_0^{\text{ca}} &= \left\{ u \in (H^1(\Omega))^3 / u = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le problème discrétisé par la méthode des éléments fins s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in U_h^{\text{ca}} \text{ tel que } \forall u_h^* \in U_{0,h}^{\text{ca}} \\ \int_{\Omega_h} \sigma_h : \varepsilon_h(u_h^*) d\omega - \int_{\Omega_h} f \cdot u_h^* d\omega - \int_{\partial_T \Omega_h} T^0 \cdot u_h^* ds = 0 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

où U_h^{ca} et $U_{0,h}^{\text{ca}}$ sont respectivement l'ensemble des champs de déplacement éléments finis u_h cinématiquement admissibles et cinématiquement admissibles à 0 :

$$\begin{aligned} U_h^{\text{ca}} &= \left\{ u_h \in (H^1(\Omega_h))^3 / u_h = u^0 \text{ sur } \partial_u \Omega_h \right\} \\ U_{0,h}^{\text{ca}} &= \left\{ u_h \in (H^1(\Omega_h))^3 / u_h = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega_h \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec :

$$u_h = \sum_k u_k N_k \quad (2.25)$$

où N_k est la fonction d'interpolation de base éléments finis au nœud k .

2.2.2.2 Efficacité d'un estimateur d'erreur

Avant d'étudier les différentes familles d'estimateurs d'erreur, il est nécessaire d'introduire la notion d'efficacité d'un estimateur. Quand la solution exacte du problème

étudié est connue, la fiabilité des estimateurs d'erreur est évaluée au moyen de son *indice d'efficacité* défini par :

$$\xi = \frac{\eta}{\|e_h\|_{\Omega}} \quad (2.26)$$

où η est une estimation de l'erreur exacte globale $\|e_h\|_{\Omega}$.

Au niveau de chaque élément du maillage, l'indice d'efficacité local est donné par :

$$\xi^e = \frac{\eta^e}{\|e_h\|_{\Omega^e}} \quad (2.27)$$

où Ω^e est le volume de l'élément e , η^e et $\|e_h\|_{\Omega^e}$ sont ses contributions aux erreurs globales respectivement η et $\|e_h\|_{\Omega}$:

$$\|e_h\|_{\Omega}^2 = \sum_{e \in T_h} \|e_h\|_{\Omega^e}^2 \quad (2.28)$$

$$\eta^2 = \sum_{e \in T_h} (\eta^e)^2 \quad (2.29)$$

Un estimateur d'erreur est dit *asymptotiquement exact* lorsque son indice d'efficacité tend vers 1 quand la taille h des éléments tend vers 0 (ou encore quand l'erreur tend vers 0) [Zienkiewicz 92(II)], [Ainsworth 97].

2.2.2.3 Estimateurs d'erreur basés sur le calcul des résidus des équations d'équilibre et les sauts des contraintes aux frontières des éléments

L'estimateur proposé par Babuška et Rheinbold [Babuška 78] consiste à calculer une estimation d'erreur η^e associée à chaque élément e du maillage à partir du calcul des résidus élémentaires des équations d'équilibre et du saut des contraintes aux interfaces des éléments. L'équation locale de l'erreur sur la contrainte au niveau d'un élément e s'écrit sous la forme faible suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \forall u^* \in U_0^{ca} \\ \int_{\Omega^e} (\sigma^e - \sigma_h^e) : \varepsilon(u^*) d\omega = - \int_{\Omega^e} [\text{div}(\sigma^e - \sigma_h^e)]^t \cdot u^* d\omega + \int_{\partial\Omega^e} [(\sigma^e - \sigma_h^e) \cdot n^e]^t \cdot u^* ds \end{array} \right. \quad (2.30)$$

où n^e et σ^e sont respectivement la normale et la contrainte calculées sur l'élément e et $\partial\Omega^e$ est l'ensemble de ses faces Γ^e :

$$\partial\Omega^e = \bigcup_{\Gamma^e \in \partial\Omega^e} \Gamma^e \quad (2.31)$$

σ_h ne vérifie pas l'équation d'équilibre (2.17) du problème continu, on définit alors le résidu r_h de l'équilibre tel que :

$$r_h = \text{div} \sigma_h + f = -\text{div}(\sigma - \sigma_h) \quad (2.32)$$

L'équation (2.30) s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \forall u^* \in U_0^{ca} \\ \int_{\Omega^e} (\sigma^e - \sigma_h^e) : \varepsilon(u^*) d\omega = \int_{\Omega^e} (r_h^e)^t \cdot u^* d\omega + \sum_{\Gamma^e \in \partial\Omega^e} \int_{\Gamma^e} [(\sigma^e - \sigma_h^e) \cdot n^{\Gamma^e}]^t \cdot u^* d\Gamma \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Soit J_{Γ^e} le saut du vecteur contrainte dans la direction normale n^{Γ^e} associée à la face Γ^e , cette dernière équation s'écrit:

$$\left| \begin{array}{l} \forall u^* \in U_0^{ca} \\ \int_{\Omega^e} (\sigma^e - \sigma_h^e) : \varepsilon(u^*) d\omega = \int_{\Omega^e} (r_h^e)^t \cdot u^* d\omega + \sum_{\Gamma^e \in \partial\Omega^e} \int_{\Gamma^e} J_{\Gamma^e}^t \cdot u^* d\Gamma \end{array} \right. \quad (2.34)$$

où

- pour une face Γ^e appartenant à $\partial_T\Omega$:

$$J_{\Gamma^e} = T^0 - \sigma_h^e \cdot n^{\Gamma^e} \quad (2.35)$$

- pour une face Γ^e appartenant à $\partial_u\Omega$:

$$J_{\Gamma^e} = 0 \quad (2.36)$$

- pour une face interne Γ , il existe deux éléments e et e' tels que $\{\Gamma^e = \Gamma^{e'}\} = e \cap e'$ avec $n^{\Gamma^e} = -n^{\Gamma^{e'}}$ (figure 2.1), le saut des contraintes à l'interface est donné par :

$$J_{\Gamma^e} = J_{\Gamma^{e'}} = (\sigma - \sigma_h^e) \cdot n^{\Gamma^e} + (\sigma - \sigma_h^{e'}) \cdot n^{\Gamma^{e'}} = (\sigma_h^{e'} - \sigma_h^e) \cdot n^{\Gamma^e} = (\sigma_h^e - \sigma_h^{e'}) \cdot n^{\Gamma^{e'}} \quad (2.37)$$

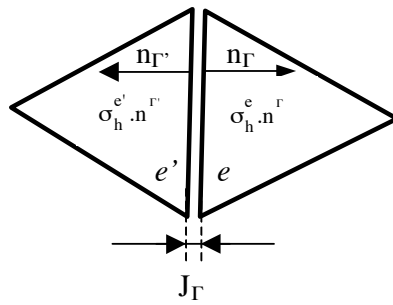


Figure 2.1 : Saut des contraintes entre deux éléments en 2D

En remplaçant u^* par $e_h = u - u_h$ dans l'équation de l'erreur (2.34), et en intégrant sur tout le domaine on obtient l'expression de l'erreur en norme d'énergie :

$$\|e_h\|_E^2 = \sum_{e \in T_h} \left(\int_{\Omega^e} (r_h^e)^t \cdot e_h d\omega + \sum_{\Gamma^e \in \partial\Omega^e} \int_{\Gamma^e} J_{\Gamma^e}^t \cdot e_h d\Gamma \right) \quad (2.38)$$

L'erreur est ainsi composée de deux parties : un premier terme correspondant au calcul du résidu de l'équation d'équilibre et un deuxième décrivant la discontinuité (saut) des contraintes à l'interface des éléments et sur la frontière.

Pour estimer l'erreur (2.38) Babuška et Rheinbold [Babuška 79] ont proposé un encadrement de celle-ci dans le cas d'un problème linéaire et avec des maillages quasi-uniformes formés par des quadrangles bilinéaires. Ils ont démontré l'existence de deux constantes K_1 et K_2 indépendantes du maillage et de la solution éléments finis et telles que:

$$K_1 \cdot \eta \leq \|e_h\|_E \leq K_2 \cdot \eta \text{ avec } K_2 \geq K_1 > 0 \quad (2.39)$$

où

$$\eta = \left(\sum_{e \in T_h} (\eta^e)^2 \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

Pour un problème d'élasticité en contraintes planes et avec des éléments linéaires, la contribution η^e d'un élément e à l'estimation globale s'écrit :

$$(\eta^e)^2 = \frac{1}{\rho} \frac{E}{1-\nu} \left(h_e^2 \int_{\Omega^e} (r_h^e)^t r_h^e d\omega + h_e \sum_{\Gamma^e \in \partial\Omega^e} \int_{\Gamma^e} J_{\Gamma^e}^t J_{\Gamma^e} d\Gamma \right) \quad (2.41)$$

où ρ est une constante, E est le module d'Young, ν est le coefficient de Poisson et h_e est la taille de l'élément e .

Le facteur $1/\rho$ introduit par Babuška et Rheinbold est choisi de telle sorte que les constantes K_1 et K_2 soient les plus proches possible de 1. Pour le cas du problème étudié et pour des maillages uniformes et une solution régulière ces deux constantes sont asymptotiquement égales à 1 si $\rho=24$.

Bien que les auteurs aient montré son efficacité pour des problèmes linéaires 1D avec des solutions régulières, l'extension de l'estimateur d'erreur résiduel pour les problèmes non linéaires 2D et 3D et avec des maillages irréguliers ne semble pas évidente. Dans une étude numérique Babuška et al. [Babuška 92-a], [Babuška 94], ont montré que l'efficacité de ce type d'estimateur dépend fortement de la régularité de la solution et de la topologie du maillage. Pour des problèmes d'élasticité avec des éléments triangles linéaires, les résultats montrent que l'estimateur est moins performant et sous-estime considérablement l'erreur lorsque l'angle minimal des triangles devient trop petit ou bien lorsque la solution présente des singularités. Par ailleurs, Ainsworth et Oden [Ainsworth 97] ont soulevé le principal inconvénient de l'estimateur résiduel. Ceci fait intervenir des constantes généralement inconnues et qui dépendent de la nature du problème étudié. De plus la détermination de ces constantes nécessite des efforts supplémentaires considérables. Des techniques d'estimation de celles-ci sont présentées dans [Babuška 92-b] et [Johnson 92].

Ainsworth et Oden [Ainsworth 92], [Ainsworth 97] ont amélioré l'estimateur résiduel par une technique dite de *résidu équilibré*. Cette approche est très similaire à celle proposée par Ladevèze et al. [Ladevèze 86] pour le calcul des contraintes statiquement admissibles (cf. §2.2.2.4). Son principe consiste à calculer des forces de traction sur les faces de chaque élément du maillage et qui sont en équilibre avec le résidu intérieur local (calculé au niveau de l'élément). La technique permet d'améliorer l'efficacité de l'estimateur et elle est théoriquement indépendante de la dimension de l'espace et de la nature de l'interpolation. Cependant seules des applications académiques 2D sont présentées. L'extension de la

technique sur des problèmes non linéaires 3D risque d'être très lourde à mettre en œuvre et très coûteuse en terme de temps de calcul.

Zienkiewicz et al. [Zienkiewicz 83] et Oden et al. [Oden 89] ont proposé d'autres alternatives d'amélioration dans le cadre des raffinements hiérarchiques p et h - p . Néanmoins, ces approches ne sont pas envisageables dans le contexte de ce travail où la nature de l'approximation ne peut pas être modifiée. En effet, le traitement de la condition d'incompressibilité du matériau exige l'utilisation des espaces d'approximation compatibles.

2.2.2.4 Estimateurs d'erreur basés sur le concept de l'erreur en relation de comportement

Le concept d'erreur en relation de comportement a été introduit dans les travaux de Ladevèze [Ladevèze 75]. Un estimateur d'erreur associé à ce concept a été présenté [Ladevèze 86] pour des problèmes d'élastoplasticité et de dynamique vibratoire 2D. Son principe repose sur la construction d'une solution *admissible* (u_{CA}, σ_{SA}) à partir de la solution éléments finis (u_h, σ_h) . u_{CA} est un champ de déplacement cinématiquement admissible (i.e. qui vérifie l'équation (2.19) et σ_{SA} est un champ de contrainte statiquement admissible (i.e. qui vérifie l'équation d'équilibre (2.17) et les conditions aux limites (2.18)). La solution (u_{CA}, σ_{SA}) est la solution exacte du problème si elle vérifie la relation de comportement (2.20), c'est-à-dire :

$$\sigma_{SA} = C \varepsilon(u_{CA}) \quad \text{sur } \Omega \quad (2.42)$$

où :

$$\varepsilon(u_{CA}) = \frac{1}{2} (\text{grad } u_{CA} + \text{grad}^T u_{CA}) \quad (2.43)$$

Si (u_{CA}, σ_{SA}) ne vérifie pas l'équation (2.42), elle n'est donc qu'une solution approchée de la solution exacte (u, σ) . Ainsi, l'erreur en relation de comportement s'écrit en norme en énergie :

$$\|\sigma_{SA} - C \varepsilon(u_{CA})\|_E = \left(\int_{\Omega} [\sigma_{SA} - C \varepsilon(u_{CA})] : C^{-1} [\sigma_{SA} - C \varepsilon(u_{CA})] d\omega \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

L'estimation d'erreur au niveau d'un élément e s'écrit: [Ladevèze 00]

$$\eta^e = \frac{\|\sigma_{SA}^e - C \varepsilon^e(u_{CA})\|_E}{\frac{1}{2} \left(\|\sigma_{SA}\|_E^2 + \|C \varepsilon(u_{CA})\|_E^2 \right)} \quad (2.45)$$

avec :

$$\|\sigma_{SA}^e - C \varepsilon^e(u_{CA})\|_E = \left(\int_{\Omega^e} [\sigma_{SA}^e - C \varepsilon^e(u_{CA})] : C^{-1} [\sigma_{SA}^e - C \varepsilon^e(u_{CA})] d\omega \right)^{1/2} \quad (2.46)$$

L'estimateur d'erreur en relation de comportement s'écrit sous la forme :

$$\eta = \left(\sum_{e \in T_h} (\eta^e)^2 \right)^{1/2} \quad (2.47)$$

Le champ de déplacement statiquement admissible u_{CA} est considéré égal à la solution éléments finis u_h [Ladevèze 86]. Ceci est justifié du fait que cette dernière satisfait déjà la

condition cinématique (2.19). On verra plus loin (cf. § 2.2.2.6) que cette hypothèse n'est plus valable dans le cas d'un matériau incompressible.

L'erreur en relation de comportement s'écrit donc:

$$\|\sigma_{SA} - C\varepsilon(u_{CA})\|_E = \left(\int_{\Omega} (\sigma_{SA} - \sigma_h) : C^{-1} (\sigma_{SA} - \sigma_h) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.48)$$

Le point crucial réside dans la construction du champ de contrainte statiquement admissible σ_{SA} . Dans [Ladevèze 86] et [Ladevèze 96], la technique développée par les auteurs ne dépend pas de la loi de comportement, elle consiste à construire σ_{SA} en utilisant la condition dite de prolongement admissible :

$$\left| \begin{array}{l} \forall e \in T_h, \forall N^i \\ \int_{\Omega^e} (\sigma_{SA}^e - \sigma_h^e) : \varepsilon^e(N^i) d\omega = 0 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

où N^i est une fonction d'interpolation de base éléments finis.

Cette construction se fait en deux étapes :

- la première étape consiste à construire sur les interfaces entre les différents éléments du maillage des densités d'efforts $\alpha_e F^e$ en équilibre avec les efforts volumiques f sur chaque élément e :

$$\left| \begin{array}{l} \forall \text{élément } e \in T_h, \forall N^i \\ \int_{\Gamma^e} \alpha_e F^e N^i d\Gamma = - \int_{\Omega^e} f N^i d\omega + \int_{\Omega^e} \sigma_h^e : \varepsilon^e(N^i) d\omega \end{array} \right. \quad (2.50)$$

α_e est une fonction définie sur chaque face de l'élément e et qui vaut -1 ou +1 de telle sorte que sur une face commune entre deux éléments adjacents e et e' on ait : $\alpha_e + \alpha_{e'} = 0$:

- dans une seconde étape le champ σ_{SA} est construit élément par élément à partir des densités d'effort $\alpha_e F^e$ en résolvant le problème d'équilibre local :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_{SA}^e + f = 0 & \text{sur } \Omega^e \\ \sigma_{SA}^e \cdot n = \alpha_e F^e & \text{sur } \Gamma^e \end{cases} \quad (2.51)$$

où n est la normale sortante à la face de l'élément e .

Remarques

- En élastoplasticité cette construction est effectuée à chaque instant t_i de la discrétisation temporelle. Toutes les équations précédentes sont donc écrites pour un instant t_i donné. Un avantage de cette approche est que pour ce type de loi de comportement elle traite l'erreur de discrétisation temporelle.
- Une propriété très intéressante de l'estimateur d'erreur en relation de comportement est qu'il donne généralement et notamment en élasticité, une surestimation de l'erreur exacte du problème.

2.2.2.5 Estimateurs d'erreur basés sur la comparaison à une contrainte continue

Dans les approximations éléments finis les degrés des fonctions d'interpolation des éléments sont généralement insuffisants pour représenter parfaitement la solution exacte du problème. Cette dernière est très souvent d'ordre supérieur à celui de la solution éléments finis. Le choix des éléments de continuité C^0 en vitesse ou en déplacement donne des solutions discontinues en contraintes (ou autre gradient). Dans l'expression de l'estimateur résiduel (2.38), on montre que pour une interpolation linéaire le terme décrivant la discontinuité (i.e. saut) des contraintes est prépondérant par rapport au terme du résidu d'équilibre. Par conséquent, et dans ces conditions, l'erreur peut être estimée uniquement à partir du terme de saut. Cette idée est à l'origine de l'approche développée par Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 87]. L'estimateur d'erreur introduit par les auteurs est basé sur la construction d'une solution d'ordre supérieure à celui de la solution éléments finis, et qui est censée être une meilleure approximation de la solution exacte du problème. Par la suite, l'erreur est considérée comme étant l'écart entre cette nouvelle solution et la solution éléments finis. Cet écart est exprimé en norme en énergie. Zhu et al. [Zhu 90], [Zhu 99] ont montré avec des modèles analytiques 1D et 2D et des éléments triangles linéaires et quadratiques, que les estimateurs de type Z^2 (Zienkiewicz et Zhu) et les estimateurs résiduels sont équivalents.

Pour le problème d'élasticité étudié l'erreur globale s'écrit :

$$\eta = \left(\int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) : (\tilde{\epsilon}_h - \epsilon_h) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.52)$$

Considérant la loi de comportement (2.20) :

$$\tilde{\sigma}_h = C \tilde{\epsilon}_h \quad \text{ou} \quad \tilde{\epsilon}_h = C^{-1} \tilde{\sigma}_h \quad (2.53)$$

où $\tilde{\sigma}_h$ (respectivement $\tilde{\epsilon}_h$) est la solution continue construite à partir de σ_h (respectivement à partir de ϵ_h)

L'estimateur (2.52) peut ainsi s'écrire sous différentes formes :

$$\eta = \left(\int_{\Omega} (\tilde{\epsilon}_h - \epsilon_h) : C (\tilde{\epsilon}_h - \epsilon_h) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.54)$$

$$\eta = \left(\int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) : C^{-1} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

C'est cette dernière expression, écrite en contraintes, qui est généralement considérée dans le calcul d'erreur. L'erreur estimée globale s'écrit :

$$\eta = \left(\sum_{e \in T_h} (\eta^e)^2 \right)^{1/2} \quad (2.56)$$

avec :

$$\eta^e = \left(\int_{\Omega^e} (\tilde{\sigma}_h^e - \sigma_h^e) : C^{-1} (\tilde{\sigma}_h^e - \sigma_h^e) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.57)$$

Dans les premiers travaux de Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 87], on construit $\tilde{\sigma}_h$ la plus proche possible de σ_h au sens des moindres carrées. Ceci consiste à minimiser la fonction suivante :

$$\Pi = \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)^2 d\omega \quad (2.58)$$

avec:

$$\tilde{\sigma}_h = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \tilde{\sigma}^k N_k \quad (2.59)$$

Les fonctions d'interpolation N_k sont celles utilisées pour les déplacements. Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 87] ont montré que l'utilisation d'un degré d'interpolation plus élevé est plus coûteuse sans être meilleure. Les valeurs nodales $\tilde{\sigma}^k$ sont obtenues en résolvant le système :

$$\forall k = 1..Nbnoe, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\sigma}^k} = 0 \quad (2.60)$$

L'équation (2.60) revient à résoudre un système de la forme $A.x=b$, où A est une matrice symétrique définie et positive de la même forme que la matrice de masse des calculs éléments finis. Une résolution itérative de ce système permet une estimation d'erreur à faible coût.

Plus récemment les auteurs ont proposé une nouvelle technique locale pour le calcul de $\tilde{\sigma}_h$: c'est la technique de recouvrement SPR (Superconvergent Patch Recovery) [Zienkiewicz 92(I)]. Celle-ci s'est avérée plus précise et moins coûteuse. Elle consiste à calculer une expansion polynomiale de chaque composante du tenseur des contraintes éléments finis sur chaque sous-domaines de maillage centré sur un nœud et contenant un ensemble de points d'intégration, appelés des patches topologiques, (figure 2.2) telle que :

$$\tilde{\sigma}_h^k(x, y, z) = P.a^k \quad (2.61)$$

où P constitue la base de l'expansion polynomiale et a^k est le vecteur contenant les coefficients du polynôme dans le patch Ω_k . Pour un problème 3D et pour des éléments linéaires :

$$P = (1, x, y, z) \quad \text{et} \quad a^k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, a_4^k)^t \quad (2.62)$$

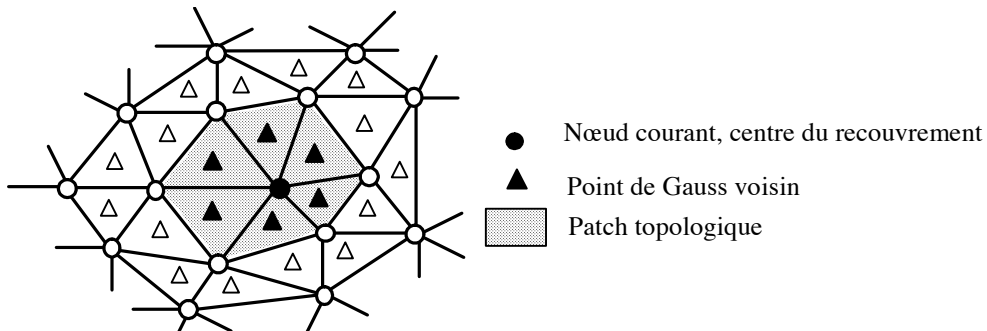


Figure 2.2 : Patch topologique nodal 2D avec des triangles linéaires

Le vecteur des coefficients a est déterminé en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$\Pi(a^k) = \sum_{i=1}^{NG} (\sigma_h(i) - \tilde{\sigma}_h^k(i))^2 = \sum_{i=1}^{NG} (\sigma_h(i) - P(x_i, y_i, z_i).a^k)^2 \quad (2.63)$$

où NG est le nombre de points d'intégration dans le patch. On reviendra avec plus de détails sur le choix de ces points particuliers dans le chapitre 4.

Le problème de minimisation s'écrit :

$$\forall i = 1..4, \quad \frac{\partial \Pi(a^k)}{\partial a_i^k} = 0 \quad (2.64)$$

La contrainte continue $\tilde{\sigma}_h$ est ensuite calculée en interpolant les valeurs nodales $\tilde{\sigma}^k$ par les fonctions d'interpolations de base éléments finis :

$$\tilde{\sigma}_h(x, y, z) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \tilde{\sigma}^k N_k(x, y, z) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} P(x_k, y_k, z_k).a^k N_k(x, y, z) \quad (2.65)$$

D'autres techniques locales ont été développées et sont utilisées pour le calcul de $\tilde{\sigma}_h$, citons à titre d'exemples la technique REP (Recovery by Equilibrium in Patches) et la technique de différences finis locales développée par Liszka et Orkisz [Liszka 80]. L'étude de ces différentes techniques fera l'objet du chapitre 4.

Babuška et al. [Babuška 94] ont proposé une étude comparative exhaustive des estimateurs de la famille Z^2 et des estimateurs résiduels. Ils ont développé une méthodologie numérique qui permet d'évaluer d'une manière objective et efficace la fiabilité des estimateurs d'erreur. Le but de cette étude est principalement l'évaluation de l'influence de la topologie du maillage sur la *robustesse* de l'estimateur d'erreur. Pour cela ils ont défini un *indice de robustesse* donné par :

$$R = \max \left(\left| 1 - \theta_L \right|, \left| 1 - \theta_U \right|, \left| 1 - \frac{1}{\theta_L} \right|, \left| 1 - \frac{1}{\theta_U} \right| \right) \quad (2.66)$$

où θ_L et θ_U sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de l'indice d'efficacité de l'estimateur d'erreur. Ce dernier est dit robuste si $R = 0$ (i.e. $\theta_L = \theta_U = 1$).

Les problèmes étudiés sont linéaires avec une solution régulière (afin de ne tenir compte que de l'influence de la topologie locale du maillage) et des éléments triangles linéaires ou quadratiques. Les auteurs ont utilisé des maillages particuliers avec des grilles complexes où la taille et la qualité des éléments sont très variables d'une région à l'autre. Ces grilles ont permis de tester différentes topologies locales du maillage dans les sous-domaines (patch) où l'on étudie la qualité locale des estimateurs (figure 2.3).

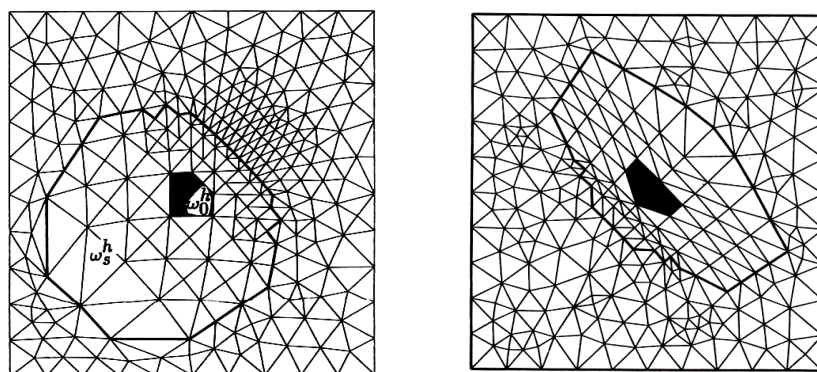


Figure 2.3 [Babuška 94] : Exemples de topologies locales testées par Babuška et al.

Les auteurs ont étudié quelques estimateurs résiduels ainsi que l'estimateur d'erreur de type Z^2 -SPR (i.e. estimateur Z^2 utilisant la technique SPR pour la construction des contraintes continues). Les conclusions principales de cette étude numérique sont:

- dans aucune configuration l'estimateur d'erreur résiduel n'est robuste, son indice de robustesse est toujours supérieur à 1 et les auteurs l'ont qualifié de non fiable.
- la technique de résidu équilibré proposée par Ainsworth et Oden [Ainsworth 92] améliore la robustesse de l'estimateur résiduel.
- l'estimateur d'erreur Z^2 -SPR est le plus robuste dans toutes les configurations et pour les différentes topologies locales du maillage. L'indice de robustesse est toujours très proche de 0. Les auteurs l'ont recommandé pour les calculs avec des maillages arbitraires (grilles complexes) souvent utilisés dans les calculs d'ingénierie.

2.2.2.6 Choix d'un estimateur pour la mise en forme

Le choix d'un estimateur d'erreur pour les problèmes de mise en forme des matériaux repose sur les deux spécificités principales de ceux-ci, à savoir la non linéarité des lois de comportement et l'incompressibilité du matériau.

Bien que l'approche de l'estimateur résiduel proposée par Babuška et Rheinbold [Babuška 78] soit mathématiquement rigoureuse, son extension aux problèmes non linéaires 3D est confrontée à quelques difficultés majeures. En effet l'efficacité de cet estimateur dépend de la qualité du maillage et de la régularité de la solution, ce qui le rend moins adapté aux problèmes de grandes déformations. D'autre part la méthode du résidu équilibré développée par Ainsworth et Oden [Ainsworth 92] risque d'être très lourde à généraliser. Dans la littérature, la majorité des applications sont présentées dans le cadre des problèmes académiques 1D et 2D. Celles dédiées aux problèmes non linéaires et des matériaux incompressibles sont peu nombreuses. Dans ce contexte on peut citer les travaux de Huerta et al. [Huerta 00] qui ont étendu l'estimateur résiduel aux problèmes 2D non linéaires, ainsi que Baranger et El Amri [Baranger 91] qui ont développé un estimateur d'erreur de type résiduel pour des écoulements de fluides quasi-Newtonien incompressibles. L'erreur totale est décomposée d'un terme de résidu, un terme de saut de contraintes et un terme lié à l'incompressibilité. L'approche peut être généralisée sur d'autre loi de comportement.

L'estimateur proposé par Ladevèze et al. [Ladevèze 86] et appelé estimateur d'erreur en relation de comportement semble très attractif. Le principe de construction des champs admissibles ne dépend pas de la loi de comportement du matériau. L'estimateur d'erreur ainsi construit a été étendu à plusieurs types de problèmes 2D d'élasticité compressible [Coorevits

95] et incompressible [Marin 91], de plasticité [Ladevèze 99-a], [Gallimard 00], d'élastoplasticité [Ladevèze 86], [Coffignal 87], [Gallimard 94], [Gallimard 96], de viscoplasticité [Ladevèze 99-b] et pour des problèmes d'élasticité 3D compressibles [Florentin 02] et incompressibles [Marin 91]. Cependant, dans le cadre de matériaux incompressibles, le traitement de la condition d'incompressibilité rend l'approche plus délicate. En effet le champ de déplacement cinématiquement admissible doit vérifier la condition d'incompressibilité. Dans ce contexte Marin [Marin 91] a développé une méthode de construction d'une solution cinématiquement admissible dans le cas de problème 2D et 3D d'élasticité. Il utilise une formulation mixte de type Hermann [Hermann 65] (u_h, H_h) où H est la variable d'Hermann qui peut être interprétée comme une pression hydrostatique. La démarche pour définir une erreur en relation de comportement est la même que celle décrite précédemment mais la condition d'incompressibilité est considérée comme une condition d'admissibilité cinématique. La technique proposée par l'auteur est à la fois compliquée et coûteuse en terme de temps de calculs. De plus elle dépend du type de l'interpolation. Pour le problème d'élasticité 3D, l'auteur présente une technique pour des tétraèdres (P2,P1). Dans le cas d'un problème à 15000 ddl, le coût du calcul d'erreur est de l'ordre de 25% de celui des calculs éléments finis, ce qui est relativement important.

Initialement développés dans le cadre de problèmes d'élasticité linéaire 2D [Zienkiewicz 87] [Zienkiewicz 92(II)], les estimateurs d'erreur de type Z^2 , ont été étendus aux différents types de problèmes 2D non linéaires de viscoplasticité [Zienkiewicz 88], [Fourment 92], [Dyduch 96], d'élastoplasticité [Booromand 99] ainsi qu'aux problèmes 3D d'élasticité linéaire [Dufeu 97], [Lee 97], [Lee 99], [Boussetta 03] et plus récemment pour les problèmes 3D de viscoplasticité incompressible [Boussetta 04]. Héty et Pelletier [Héty 92] ont étudié l'efficacité des estimateurs de type Z^2 pour l'adaptation des maillages dans le cadre des fluides visqueux incompressibles. L'étude est basée sur des problèmes analytiques de type Navier Stokes ainsi que des comparaisons à des résultats expérimentaux. Les auteurs ont montré que l'estimateur est très sensible aux zones de fortes déformations et peut capter différents phénomènes importants tels que les gradients et les couches de cisaillement.

L'extension de l'estimateur Z^2 à différents types de problèmes non linéaires est faite sans qu'aucun résultat théorique ne soit établi dans ce contexte. L'approche repose seulement sur le fait que la contrainte $\tilde{\sigma}_h$ est plus précise que la solution éléments finis et assure une meilleure approximation de la solution exacte σ . Cette propriété est souvent vérifiée, ainsi qu'on le montrera au chapitre 5. Dans la littérature c'est l'estimateur le plus répandu dans le contexte de problèmes non linéaires. Il allie à la fois efficacité et simplicité de mise en œuvre avec de très faibles coûts de calcul. Son intégration dans un code industriel existant se fait aisément et sans contraintes particulières. C'est l'estimateur d'erreur que nous adoptons dans le cadre de ce travail. Il sera intégré dans le logiciel Forge3[®] pour le pilotage de la procédure d'adaptation du maillage.

Chapitre 3

Maillage et adaptation

Résumé:

Dans ce chapitre, nous présentons les principales techniques de génération de maillages à partir d'une discrétisation de la frontière. On s'intéressera particulièrement à la génération de maillages tétraédriques. Nous introduisons ensuite les différentes techniques d'adaptation de maillage et nous décrivons deux stratégies d'optimisation couramment utilisées dans le cadre de la h -adaptation.

3.1 Introduction

Une étape cruciale dans la simulation numérique de tout problème physique par la méthode des éléments finis est la *génération d'un maillage* associé à la géométrie du domaine considéré. La construction du maillage est un processus d'autant plus délicat quand il s'agit de simuler un problème industriel dans lequel les géométries sont très arbitraires et très souvent complexes. Actuellement différentes techniques permettant la construction de manière entièrement automatique un maillage associé à une géométrie donnée sont disponibles. Le principe de la méthode des éléments finis fait que la qualité de la solution dépend fortement de celle du maillage. Par conséquent, dans un problème donné, le maillage construit par l'une ou l'autre des techniques doit satisfaire un ensemble de contraintes liées à la qualité requise de la solution, on parle ainsi d'*adaptation de maillage*. Dans le chapitre précédent, nous avons proposé des outils qui permettent d'évaluer *a priori* et *a posteriori* la qualité de la solution. Ces outils offrent un moyen efficace pour piloter le problème d'adaptation de maillage et permettre par le biais d'une *stratégie d'optimisation* de construire un maillage optimal dans le sens où il satisfait l'ensemble des contraintes requises.

Dans ce qui suit on s'intéressera aux aspects *génération*, *adaptation* et *optimisation* de maillage. Dans un premier temps, nous faisons l'état de l'art des principales techniques de génération de maillage en décrivant brièvement le principe de chacune. Ensuite nous abordons le problème d'adaptation de maillage et nous introduisons les différentes méthodes d'adaptation: méthode *r* (*r*-adaptation), méthode *p* (*p*-adaptation) et méthode *h* (*h*-adaptation). Dans la dernière partie nous décrivons, dans le cadre de la *h*-adaptation, deux *stratégies d'optimisation* de maillage couramment utilisées en pratique

3.2 Méthodes de génération de maillage d'un domaine à partir du maillage de sa frontière

Actuellement, différentes méthodes de génération automatique de maillages non structurés sont disponibles. Les plus populaires sont la méthode *frontale*, la méthode de type *Octree*, la méthode de *Delaunay* et la méthode par *optimisation topologique*. Dans ce qui suit nous nous limitons à la génération de maillages 3D tétraédriques. Pour une présentation plus exhaustive de ces différentes techniques, le lecteur est invité à consulter les travaux dédiés aux problèmes de génération de maillage. Citons à titre indicatif les travaux Frey et George [Frey 99] et George [George 01] pour l'ensemble des méthodes étudiées et Coupez [Coupez 91] et Gruau [Gruau 04] pour la méthode par optimisation topologique.

Pour toutes les méthodes, on considère un domaine Ω représenté par l'ensemble N des sommets de la discrétisation de sa frontière (ou maillage surfacique). Le problème est : comment construire le maillage volumique de Ω à partir du maillage de la frontière ?

3.2.1 Méthode frontale

Cette méthode consiste à construire un maillage élément par élément en créant de manière «optimale» de nouveaux nœuds et en les connectant avec les tétraèdres déjà formés. Ceci revient à déplacer un «front de génération» dans l'espace du domaine non encore maillé, jusqu'à avoir balayé tout le domaine (figure 3.1). Le front, initialement constitué de tout le maillage surfacique, représente la frontière entre la partie du domaine déjà maillé et le reste du domaine qui est encore vide.

L'algorithme de la méthode consiste principalement à appliquer de manière itérative les étapes suivantes :

1. initialiser le front (au début du processus, le front est constitué de la triangulation de la frontière du domaine).
2. introduire de manière optimale un nouveau nœud à ce front.
3. connecter le nouveau nœud à la face choisie du front et création du nouvel élément.
4. mettre à jour le front.

Le processus s'arrête quand le front devient vide, c'est à dire quand le domaine Ω est entièrement maillé.

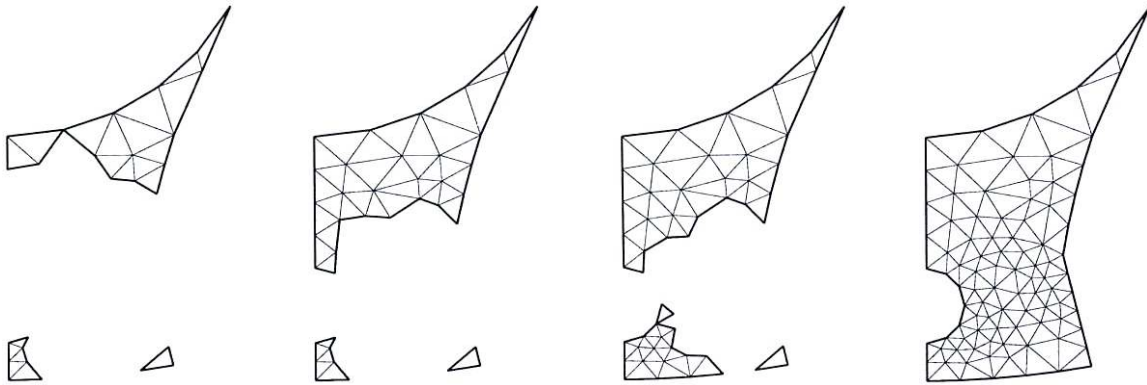


Figure 3.1 [Frey 99] : Génération de maillage 2D par la méthode frontale

L'avantage de cette technique est qu'elle tend à construire des maillages de bonne qualité sur la frontière. Ceci est assuré par le fait que les nouveaux nœuds sont introduits de manière optimale : étant donnée une face triangulaire du front une position idéale du nœud est calculée pour assurer la meilleure qualité du tétraèdre. Une mesure de la qualité de celui-ci est donnée par [George 01] :

$$\gamma = \frac{72\sqrt{3} \text{ volume du tétraèdre}}{(\text{Somme des carrés des arêtes})^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1)$$

La position du nœud est choisie de manière à ce que le tétraèdre construit correspond à la valeur maximale de γ .

Le principal inconvénient de la méthode est l'apparition, dans certaines configurations, de problèmes de convergence. Des régions difficiles voire impossibles à mailler peuvent subsister ce qui arrête le processus sans aboutir à un maillage complet du domaine. En 2D le problème de convergence ne se pose pas et la génération de maillage est un problème pratiquement déterministe. En effet *"la phase de création d'un élément à partir d'un constituant du front et d'un réseau de nœuds donné est toujours possible dans le plan. En revanche, le respect des faces et les intersections rend cette opération souvent impossible en 3D"* [Rassineux 95]. Le développement d'un algorithme efficace et robuste semble être dans ce cas beaucoup plus délicat. Rassineux [Rassineux 95] a développé un algorithme de génération automatique de maillages tétraédriques non structurés par une technique de type frontale. Le mailleur a montré une grande efficacité à générer des maillages de bonne qualité pour des géométries tridimensionnelles relativement complexes. Afin de satisfaire des impératifs liés à la qualité du maillage ainsi qu'au respect de la géométrie et d'une carte de taille imposée, le mailleur contient un algorithme d'optimisation de maillage très efficace basé

sur des améliorations topologiques locales [Rassineux 97] . Celles ci consistent à extraire des sous-volumes du domaine maillé et à remailler leur enveloppe en améliorant la qualité des tétraèdres.

3.2.2 Méthode de type Octree

Cette méthode repose sur des techniques de décomposition spatiale. Le domaine Ω est initialement inclus dans une boîte contenant des cellules cubiques disjointes et qui constituent une partition de celui-ci. Ces cellules, de tailles variables, sont récursivement subdivisées afin de capturer la frontière de Ω ou satisfaire des consignes sur la taille des éléments. Plusieurs critères d'arrêt de ce processus de subdivision sont possibles. Un exemple de critère est celui que le raffinement d'une cellule cesse dès qu'elle contient au plus un noeud. L'ensemble des cellules forme l'arbre (structure de l'arbre) associé à la décomposition spatiale. La boîte englobante constitue la racine de cet arbre.

Une fois l'arbre construit (Ω est décomposé en plusieurs cellules) l'algorithme consiste à appliquer, de manière itérative, les étapes suivantes :

1. supprimer les cellules extérieures au domaine à mailler ;
2. décomposer les cellules restantes en tétraèdres. La réunion de ces tétraèdres formera le maillage du domaine ;
3. éliminer, dans ces cellules, les tétraèdres qui sont extérieurs au domaine ;
4. régulariser le maillage en déplaçant les nœuds frontières sur la surface du domaine à mailler ;

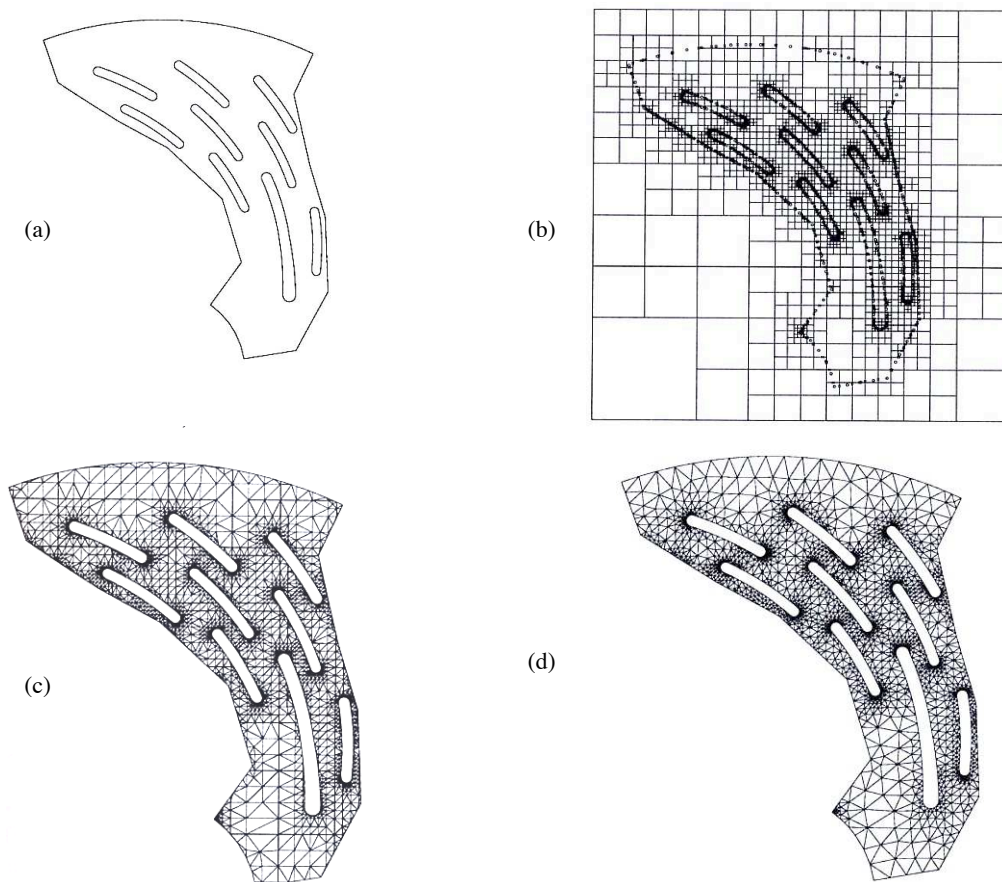


Figure 3.2 [Frey 99]: Génération de maillage 2D par la méthode de type Octree
(a) domaine à mailler, (b) décomposition spatiale, (c) maillage résultant, (d) maillage après optimisation

L'inconvénient majeur de cette méthode, et contrairement à la méthode frontale, est qu'elle tend à générer des éléments de mauvaise qualité sur la frontière du domaine. Pour cela, elle semble plus adaptée aux problèmes dans lesquels la solution physique n'est pas très sensible aux détails géométriques de la frontière.

Remarque

Afin d'améliorer la qualité du maillage final, le processus de cette méthode peut être suivi d'une étape d'optimisation (figure 3.2-(d)) dont les critères reposent sur des mesures de la qualité des éléments du maillage [Frey 99].

3.2.3 Méthode de type Delaunay

3.2.3.1 Définitions

- a - Diagramme de Voronoï

Le fondement mathématique de l'algorithme de triangulation de Delaunay sont les polyèdres de Voronoï (polygones en 2D, voir figure 3.3). Ceux-ci recouvrent l'espace du domaine Ω sans chevauchement et constituent le diagramme de Voronoï correspondant à l'ensemble N des noeuds de la discrétisation frontière.

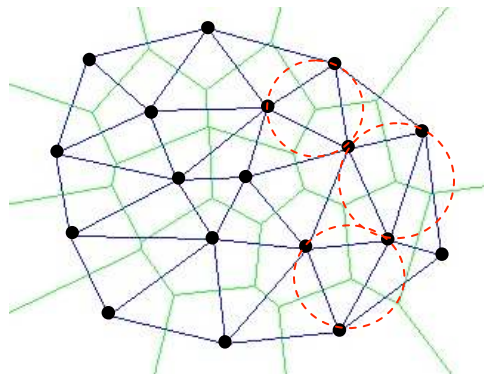


Figure 3.3: Diagramme de Voronoï 2D et triangulation de Delaunay correspondante

- b - Critère de Delaunay (ou critère de la boule vide)

Le critère de Delaunay indique qu'il n'existe aucun noeud dans la boule (disque en 2D, figure 3.3) circonscrite à chaque tétraèdre.

- c - Triangulation de Delaunay

La triangulation de Delaunay est construite en joignant tous les sommets qui appartiennent à deux polyèdres de Voronoï adjacents. Cette triangulation est unique, et composée de tétraèdres formant le maillage de l'enveloppe convexe de N .

3.2.3.2 Méthode de maillage de Delaunay

Les étapes de l'algorithme de génération de maillage par la méthode de Delaunay sont:

1. trianguler une boîte (un parallélépipède) qui englobe le domaine Ω : il s'agit de le décomposer en 5 ou 6 tétraèdres ;

2. insérer et connecter les noeuds frontières selon le critère de Delaunay formant ainsi la triangulation de Delaunay. On obtient un maillage grossier de l'enveloppe convexe de Ω ne contenant que les noeuds frontières (figure 3.4 (c)) ;

Soulignons qu'à cette étape, et selon le processus de l'insertion des noeuds frontières, il n'y'a aucune garantie que les faces frontières du maillage surfacique de Ω soient présentes dans la triangulation de Delaunay obtenue. On verra dans la suite de l'algorithme qu'une étape dite de « forçage » de la frontière est nécessaire afin de retrouver le maillage surfacique de Ω . La triangulation n'est plus donc strictement de Delaunay, d'où le nom triangulation de Delaunay contrainte ;

3. introduire itérativement les noeuds internes dans le maillage grossier au moyen du noyau de Delaunay ;

L'introduction d'un nouveau nœud au moyen du noyau de Delaunay consiste à retirer les tétraèdres dont les boules circonscrites contiennent le nœud introduit (cavité de Delaunay). Ensuite il s'agit de créer de nouveaux tétraèdres avec ce nouveau nœud et les faces restantes des éléments supprimés (étoilement) ;

4. retrouver le maillage surfacique initial de Ω en effectuant des bascules entre faces et arêtes et en supprimant les tétraèdres en dehors du domaine. De nouveaux noeuds peuvent également être introduits ;

5. optimisation du maillage ;

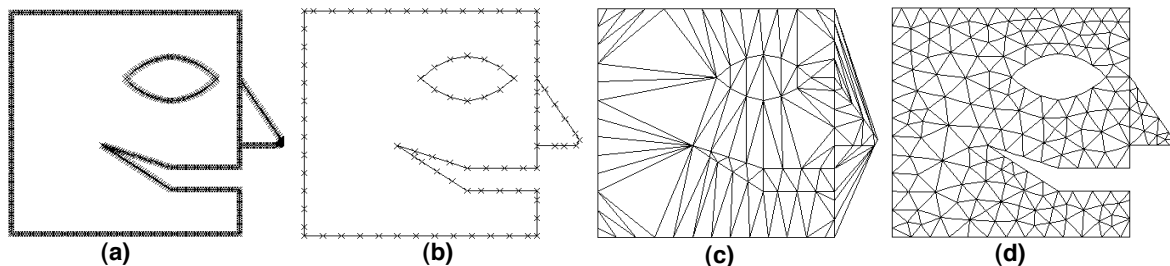


Figure 3.4: Maillage 2D par la méthode de Delaunay

(a) domaine à mailler, (b) discrétisation frontière, (c) triangulation de Delaunay, (d) maillage final optimisé

L'inconvénient majeur de la méthode de Delaunay est qu'elle peut générer des éléments de mauvaise qualité, l'étape d'optimisation de maillage est généralement indispensable afin d'améliorer la qualité du maillage obtenu. En effet en 3D le mailleur de Delaunay peut faire apparaître des tétraèdres indésirables dans le maillage appelés *sliver* qui sont aplatis (dégénérés) mais qui vérifient le critère de Delaunay.

Du point de vue technique, le mailleur de Delaunay rencontre des difficultés, notamment pour les problèmes 3D, qui sont liées principalement à l'étape de forçage de la frontière. En 2D le recouvrement des arêtes frontières se fait par des bascules d'arêtes, mais en 3D il existe des cas où les bascules des arêtes et des faces ne permettent pas toujours de retrouver les faces frontières, ce qui nécessite l'ajout de noeuds supplémentaires pour y parvenir.

3.2.4 Méthode de maillage par optimisation topologique

C'est une méthode qui a été mise au point par Coupez [Coupez 91], [Coupez 94], [Coupez 00] dans les années 90. Bien qu'elle soit actuellement utilisée dans diverses applications, cette approche a été initialement développée pour résoudre de façon automatique

l'étape de remaillage en grandes déformations. En effet pour la simulation numérique des procédés de mise en forme des matériaux, la pièce subie d'importantes déformations et le maillage qui suit la déformation de la pièce dégénère rapidement. L'étape du remaillage est primordiale pour la continuité des calculs. On verra que le principe de l'algorithme de génération est différent des trois techniques précédentes. De plus, il présente la particularité de coupler les remaillages de la surface et du volume du domaine.

Avant de développer le principe du «mailleur topologique», nous introduisons quelques notions nécessaires à la description de son fonctionnement.

3.2.4.1 Topologie de maillage

Un maillage est défini par un ensemble d'éléments. Chaque élément est défini par les numéros des nœuds formant ces sommets. La connectivité de ces nœuds et les propriétés s'y rattachant définissent la topologie du maillage. Concrètement, il ne s'agit que du tableau de connexion des éléments qui, à chaque numéro d'élément, fournit le numéro des nœuds constituant ses sommets.

Soient alors \mathcal{N} l'ensemble fini de nœuds de Ω , \mathcal{T} l'ensemble des éléments dont les sommets appartiennent à \mathcal{N} et \mathcal{F} l'ensemble des faces de ces éléments tel que :

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \bigcup_{e \in \mathcal{T}} \partial\Omega^e \quad (3.2)$$

$\partial\Omega^e$ est la frontière du tétraèdre Ω^e composée de ses quatre faces.

\mathcal{T} est une topologie de maillage de Ω si et seulement si :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathcal{T}), 1 \leq \text{Card}\{e \in \mathcal{T} \text{ tel que } f \in \partial\Omega^e\} \leq 2 \quad (3.3)$$

où $\text{Card}\{\cdot\}$ est le nombre d'éléments de l'ensemble $\{\cdot\}$.

Cela revient à dire que \mathcal{T} est une topologie de maillage si toute face d'élément du maillage appartient au plus à deux tétraèdres (un seul sur la frontière).

3.2.4.2 Critère de volume minimal

Soit \mathcal{T} une topologie de maillage sur \mathcal{N} . $(\mathcal{T}, \mathcal{N})$ engendre un maillage de Ω si et seulement si :

$$\sum_{e \in \mathcal{T}} |\Omega^e| = |\Omega| \quad (3.4)$$

où $|\Omega^e|$ et $|\Omega|$ sont les volumes respectifs de l'élément e et du domaine.

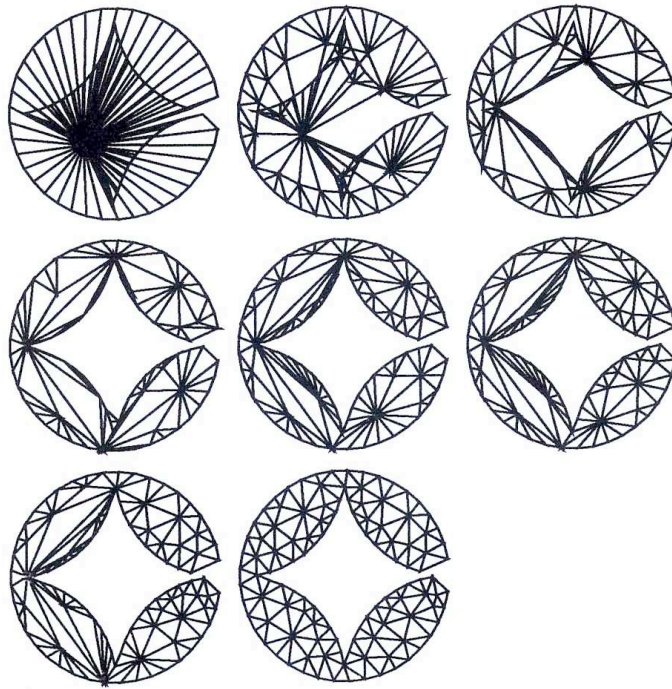


Figure 3.5 [Coupez 91]: Génération de maillage 2D par optimisation topologique

3.2.4.3 Génération de maillage par le mailleur topologique

La construction d'un maillage par le mailleur topologique comprend deux étapes principales :

1. à partir d'une discrétisation de la frontière du domaine à mailler, construire une topologie initiale. Cette étape consiste à connecter, par un opérateur d'étoilement (figure 3.6) un nœud à tous les autres hormis ceux qui appartiennent à la même face que ce dernier. Le résultat de cette étape n'est évidemment pas un maillage : des éléments peuvent traverser la frontière, se superposer, etc. (figure 3.5 en haut à gauche et figure 3.9 (a)). C'est néanmoins une topologie de maillage qui est un point de départ suffisant pour démarrer le processus de création d'un maillage valide.
2. améliorer, par balayage et de manière progressive, la topologie courante:

Pour chaque nœud et chaque arrête:

- supprimer la topologie locale mise en cause étoilée par nœud ou par arrête (ensemble des éléments contenant ce nœud ou cette arrête)
- remplacer par une autre topologie obtenue par l'opérateur d'étoilement.

Parmi les candidats obtenus par l'opérateur d'étoilement, la topologie choisie est celle qui minimise le volume total $\sum_{e \in T} |\Omega^e|$.

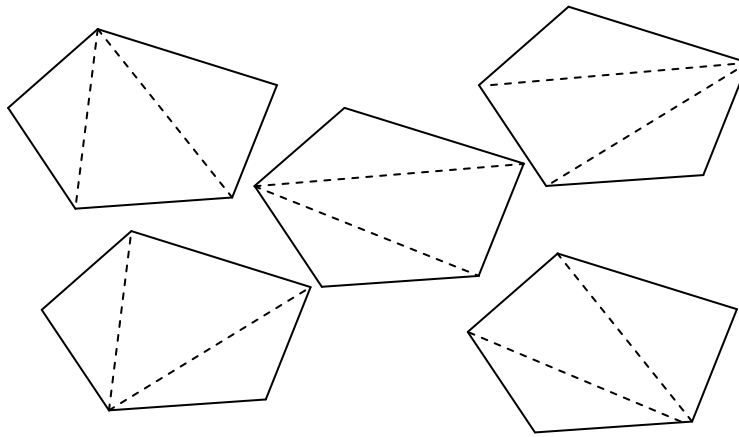


Figure 3.6 : Différentes topologies possibles proposées par l'opérateur d'étoilement

La figure 3.7 montre des exemples d'opérations topologiques autour d'un nœud. La topologie autour du point S est mise en cause. Différentes topologies sont alors possibles. Une première consiste à éliminer les nœuds S et S_6 (figure 3.7-(b)). Une autre possibilité consiste à éliminer le nœud S_6 , et bouger le nœud S vers l'isobarycentre des sommets C .

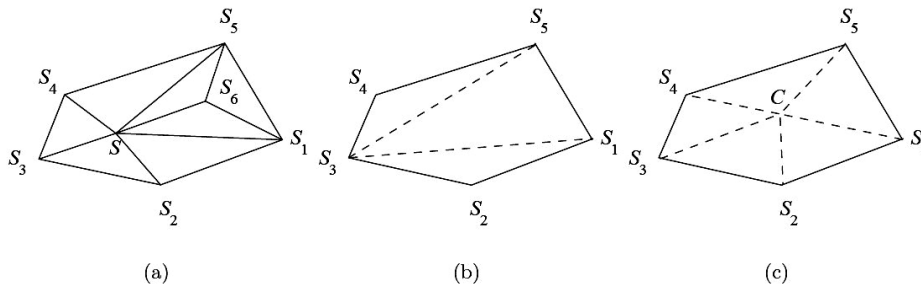


Figure 3.7 : Opérations topologiques autour d'un nœud

Des exemples d'opérations topologiques autour d'une arête sont représentés sur la figure 3.8. La topologie autour de l'arête SS' est mise en cause. Une topologie possible est obtenue en éliminant le nœud S_3 (figure 3.8-(b)). D'autres topologies sont possibles par une bascule d'arête (figure 3.8-(c)) ou par l'introduction d'un nouveau sommet au milieu de $[SS']$ ((figure 3.8-(d)).

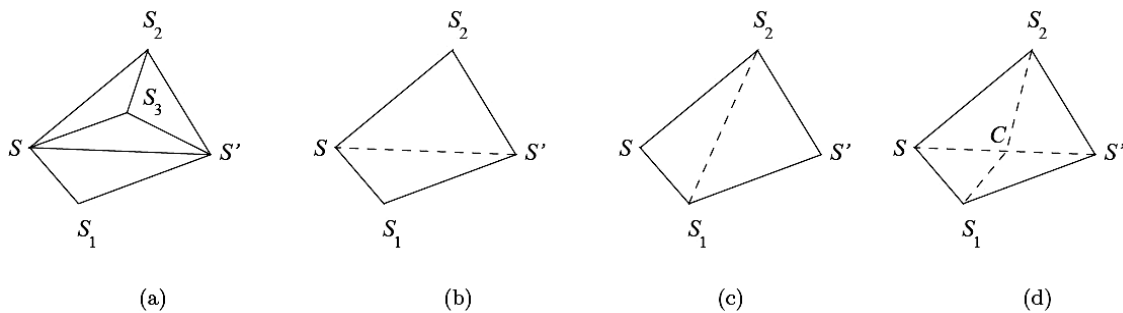


Figure 3.8 : Opérations topologiques autour d'une arête

En 3D, l'équivalent de la bascule d'arête en 2D est la transformation de deux tétraèdres ayant une face commune en trois tétraèdres.

À l'étape 2 de l'algorithme décrit précédemment, plusieurs topologies de maillage peuvent avoir le même volume. Il est donc nécessaire de privilégier celle dont les éléments sont de meilleure qualité géométrique. Celle-ci est mesurée avec le critère de forme suivant:

$$C(e, h_e) = C_0 \frac{|\Omega_e|}{h_e^3} \quad (3.5)$$

où h_e est la longueur moyenne des arêtes du tétraèdre e . C_0 est une constante qui permet de normaliser le facteur de forme à 1 pour un tétraèdre équilatéral.

$C(e, h_e)$ est maximal pour un tétraèdre équilatéral et est égal à 0 pour un tétraèdre plat. Dans le processus d'amélioration topologique, les tétraèdres choisis sont ceux qui maximisent $C(e, h_e)$.

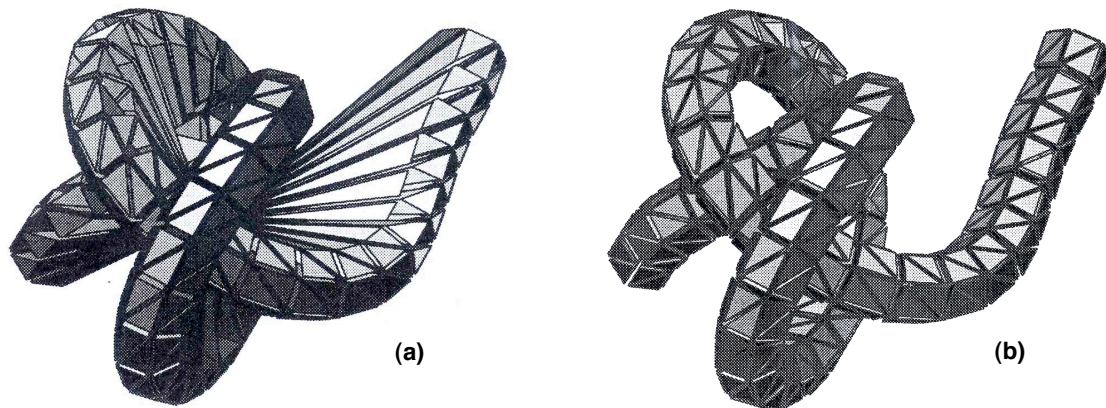


Figure 3.9 [Coupez 91]: Génération de maillage 3D par optimisation topologique
(a) topologie initiale, (b) maillage tétraédrique final obtenu

L'amélioration des topologies locales se fait de manière itérative jusqu'à atteindre le volume minimal de la topologie. On peut voir sur figure 3.5 (du haut vers le bas et de gauche à droite) les améliorations locales sur les topologies intermédiaires qui ne sont pas des maillages valides mais s'approchant de la solution finale. Le volume minimal est celui du maillage final.

3.2.4.4 Remaillage de la surface et couplage avec le volume

L'un des avantages du mailleur topologique par rapport aux techniques précédentes, est qu'il permet de remailler simultanément le volume et la surface tout en respectant la géométrie du domaine. Le principe consiste à créer, dans une première étape, une couche d'éléments «virtuels» connectés aux sommets du maillage surfacique et extérieurs au domaine. Pour cela il suffit de dupliquer «virtuellement» chaque nœud frontière et de le relier à son double. Ce qui forme des tétraèdres «virtuels» (figure 3.10) qui ne contribuent pas au calcul du volume (3.4) (i.e. le volume d'un élément virtuel est maintenu nul). Les nœuds et les faces frontières sont désormais des nœuds intérieurs au domaine. Ainsi des nœuds frontières peuvent être éliminés ou déplacés, d'autres nœuds peuvent être introduits et les arêtes frontière peuvent être basculées. Ceci permet de modifier le maillage surfacique par les opérations topologiques en volume. Tout changement de topologie doit simplement conserver un volume nul aux éléments virtuels. Sous cette contrainte le volume du domaine est conservé.

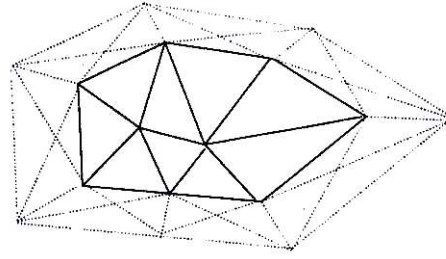


Figure 3.10: éléments virtuels (en pointillé) obtenus en dupliquant les nœuds frontières

3.2.4.5 Adaptation de maillage : carte de taille

Il s'agit ici de décrire comment le mailleur topologique est capable de respecter une carte de taille imposée dans le processus de maillage ou de remaillage.

Soit H la carte taille contenant la taille imposée h_e^{imp} de chaque élément e du maillage. Cette taille peut être imposée par l'utilisateur ou bien automatiquement calculée à travers une stratégie d'optimisation de maillage (c.f. § 3.4).

La méthode consiste à comparer et minimiser l'écart entre la taille actuelle h_e de l'élément et la taille imposée. Pour cela le facteur de forme est modifié de la manière suivante :

$$C(e, h_e, h_e^{\text{imp}}) = C(e, h_e) \frac{\min(|\Omega_e|, |\omega(h_e^{\text{imp}})|)}{\max(|\Omega_e|, |\omega(h_e^{\text{imp}})|)} \quad (3.6)$$

$|\omega(h_e^{\text{imp}})|$ est le volume du tétraèdre de taille h_e^{imp}

L'algorithme du mailleur topologique est inchangé, utilisant juste ce nouveau facteur de forme pour ordonner les topologies de maillage.

Remarque

La carte de taille H doit être projetée sur les nœuds du maillage. L'intérêt de ce passage par une carte nodale est que celle-ci est plus facilement prolongée quand de nouveaux nœuds sont introduits. Un nouveau nœud crée au barycentre d'un sous-ensemble de nœuds est associé à la moyenne des tailles de maille correspondantes. Le calcul de la carte nodale à partir de la carte par élément se fait par une simple moyenne.

La taille au nœud s'écrit:

$$h_k = \frac{1}{M} \sum_{e \in \mathcal{E}_k} h_e \quad (3.7)$$

où M est le nombre total d'éléments contenant le nœud k .

La taille des éléments est directement introduite dans leurs facteurs de forme. Dans un problème d'optimisation de maillage cela assure le respect des cartes de tailles optimales permettant ainsi le pilotage du remaillage adaptatif.

Les principaux avantages du mailleur topologiques se manifestent clairement dans le cadre de problèmes instationnaires en grandes déformations 3D. D'une part, et contrairement aux approches de type Delaunay, Octree et frontale, le mailleur topologique permet de remailler la surface et de coupler l'adaptation frontière et volumique. D'autre part, pendant la

phase de remaillage, et plutôt que de reconstruire tout le maillage, celui-ci est adapté en utilisant toujours la méthode d'optimisation locale. L'effet obtenu est que dans un cycle adaptatif, le maillage au niveau des zones mortes (i.e. les zones à très faibles déformations) est pratiquement inchangé ce qui optimise le coût du remaillage. Concrètement il ne s'agit pas d'un remaillage proprement dit mais plutôt d'une amélioration du maillage par adaptation. Dans le chapitre 6, les applications témoignent de la robustesse du mailleur topologique.

3.3 Techniques d'adaptation de maillage

Les techniques d'adaptation de maillage reposent sur trois méthodes principales : méthode h , méthode r et méthode p . Celles-ci sont usuellement appelées h -adaptation, r -adaptation et p -adaptation. Une combinaison entre la méthode h et p peut être aussi utilisée dans l'adaptation de maillage on parle ainsi de la hp -adaptation.

3.3.1 h - adaptation

Dans ce type d'adaptation, le maillage est raffiné en augmentant le nombre de degrés de liberté. Plusieurs possibilités sont envisageables :

- Adaptation à partir d'un maillage *père*: à partir d'un maillage initial, dit maillage père, le maillage adapté (maillage fils) est construit en subdivisant les éléments dans les zones de maillages où l'erreur est importante en ajoutant récursivement des nœuds par exemple au milieu de chaque arête (figure 3.11 (b)). Les maillages obtenus sont dits «quasi-uniformes».

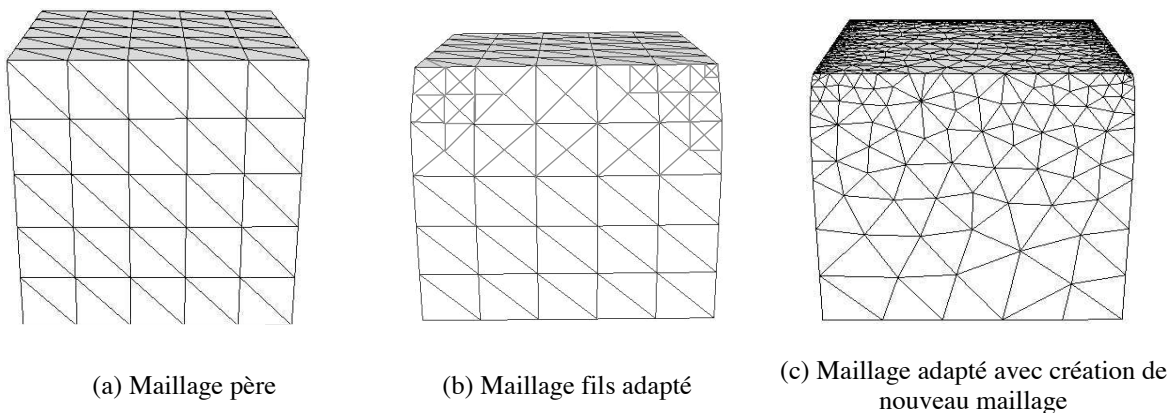


Figure 3.11 : h -adaptation avec raffinement non uniforme
(problème d'écrasement d'un cube)

- Adaptation avec création d'un nouveau maillage : dans ce cas il s'agit d'un remaillage complet du domaine (figure 3.11 (c)). On construit un tout nouveau maillage avec un raffinement dans les zones où l'erreur est importante et déraffinement dans les zones où l'erreur est faible. Ceci permet d'uniformiser la distribution de l'erreur. Ce type d'adaptation nécessite un mailleur automatique qui reçoit en consigne la taille des éléments. Cette dernière est calculée à partir des résultats obtenus sur le maillage père. Dans la pratique c'est le type d'adaptation qui est le plus utilisé et c'est celui que l'on adoptera dans les procédures de remaillage adaptatif.
- Adaptation avec raffinement uniforme de tout le maillage (figure 3.12). en pratique ce type de raffinement permet de tester ou de valider le taux de convergence théorique de la méthode des éléments finis [Babuška 82].

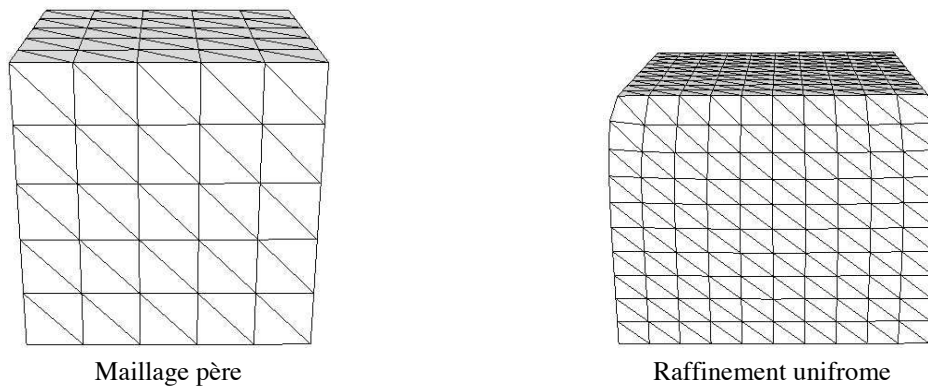


Figure 3.12 : h -adaptation avec raffinement uniforme
(problème d'écrasement d'un cube)

3.3.2 r -adaptation

Cette technique d'adaptation consiste à améliorer la solution en optimisant la position des nœuds dans le maillage sans en ajouter de nouveaux et sans modifier les connectivités. Le maillage amélioré est ainsi obtenu en déplaçant les nœuds vers les zones où l'erreur est importante (figure 3.14). L'inconvénient de cette technique est que l'amélioration de la précision est limitée par le nombre de degrés de liberté disponibles.

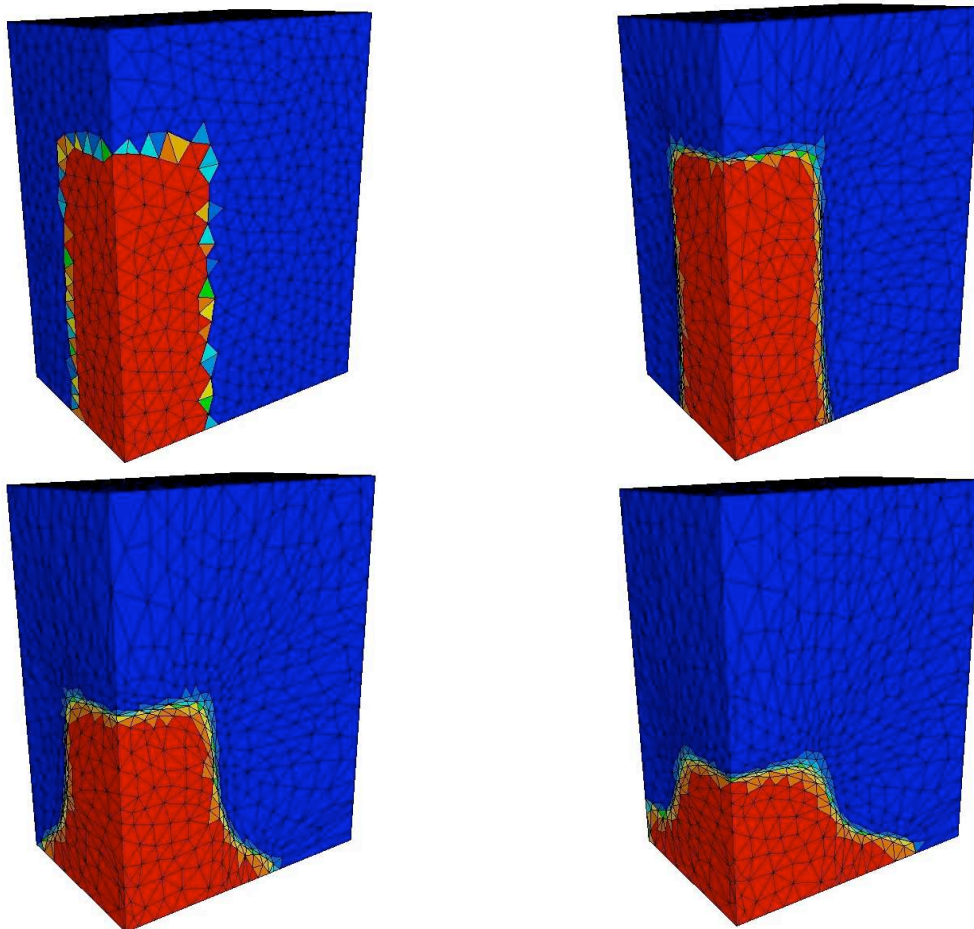


Figure 3.14 [Coupez 02] : capture de la surface libre d'un écoulement par r -adaptation

Bigo [Bigo 01] a utilisé ce type d'adaptation pour la simulation des problèmes dynamiques d'injection de polymères et le remplissage de moules, pour suivre l'évolution du front de matière. Dans le cas des problèmes de mise en forme, la nature de l'écoulement et des grandes déformations décrites par une approche lagrangienne nécessite l'adaptation continue du maillage et le changement de topologie afin de capturer les détails géométriques. La méthode d'adaptation r s'avère dans ce cas insuffisante.

3.3.3 p -adaptation

Il s'agit d'une autre manière d'augmenter la précision de la solution. Elle consiste à augmenter le degré d'interpolation des éléments en conservant la topologie du maillage (figure 3.15). Cette augmentation peut être uniforme sur tout le maillage, on parle ainsi d'une p -adaptation uniforme. Dans le cas où le degré d'interpolation est augmenté localement (figure 3.15) on parle de p -adaptation adaptative. Babuška et Szabó [Babuška 82], [Szabó 86] ont montré que dans certains cas, lorsque la solution présente une singularité sur la frontière, le taux de convergence de la p -adaptation est 2 fois plus élevé que celui de la h -adaptation avec des maillages quasi-uniformes. Pour une succession de maillages adaptés (cas de raffinement avec construction de nouveaux maillages) la h -adaptation peut avoir des taux de convergence plus élevés que la p -adaptation. D'autre part, dans le cas d'une solution régulière la vitesse de convergence de la p -adaptation est exponentielle [Szabó 91], [Szabó 86]:

$$\|e_h\|_{H^1} \leq C \exp(-\gamma N^\theta) \quad (3.8)$$

N est le nombre de degrés de liberté, C , γ et θ sont des constantes positives avec $\theta \geq 0,5$.

Cugnon [Cugnon 00] a montré que la p -adaptation est plus adaptée aux analyses locales dans des structures présentant un nombre limité de zones singulières. Par ailleurs, pour des problèmes très singuliers la convergence de cette méthode n'est pas meilleure que la h -adaptation.

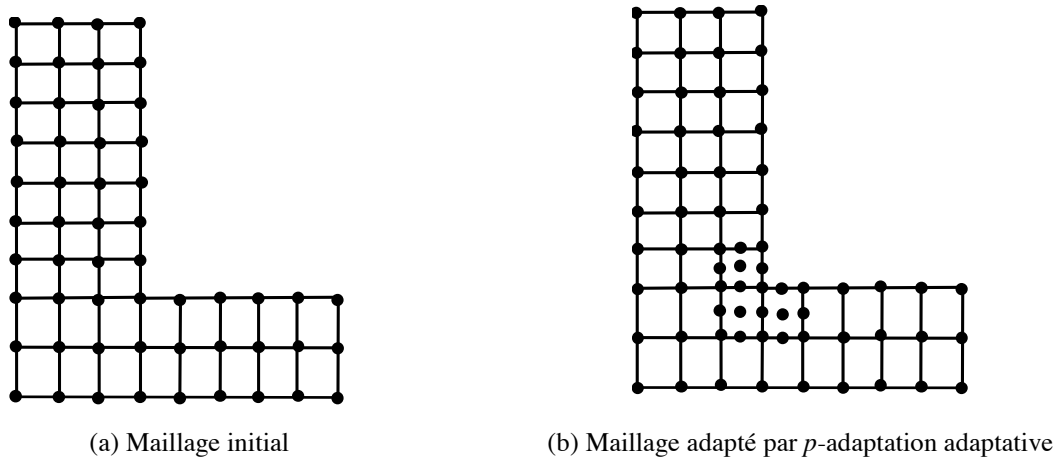


Figure 3.15 : p -adaptation

L'inconvénient majeure de la p -adaptation est qu'elle est difficile à introduire dans un code de calcul existant. Le problème se pose au niveau du traitement de la condition d'incompressibilité. En effet, pour les problèmes incompressibles avec une formulation mixte, les éléments utilisés doivent nécessairement vérifier la condition de compatibilité de Brezzi-Babuška et il n'est pas aisé de proposer des éléments mixtes et compatibles pour tout degré d'interpolation. Dans la pratique, on connaît un nombre limité d'éléments mixtes compatibles.

Par ailleurs, Babuška et Szabo [Babuška 82] ont montré numériquement que pour un problème d'élasticité le taux de convergence de la méthode est indépendant du coefficient du poisson (les valeurs du coefficient de poisson testées sont 0,3 et 0,4999).

3.3.4 *hp*-adaptation

Cette technique est une combinaison entre la *h*-adaptation et la *p*-adaptation. L'objectif est d'améliorer la précision des calculs en profitant des avantages des deux méthodes. Par exemple, on commence par un raffinement par la méthode *h* pour répartir uniformément l'erreur, puis on le poursuit par un raffinement par la méthode *p* afin d'augmenter le taux de convergence qui devient ainsi exponentiel [Zienkiewicz 89-b], [Babuška 82] et [Ainsworth 00]. Cugnon [Cugnon 00] a testé un schéma d'adaptation *h-p* pour le contrôle d'erreur de discrétisation éléments finis sur un problème linéaire 2D (Barrage soumis à une pression hydrostatique en déformation plane). Il consiste à faire, dans une première étape, une série de raffinements de type *h* pour atteindre une précision intermédiaire. Ensuite la précision requise est atteinte par l'augmentation du degré des éléments par la *p*-adaptation. Les résultats montrent que l'adaptation *h-p* permet d'atteindre les précisions prescrites avec moins de degrés de liberté qu'avec une adaptation *h*.

3.4 Stratégies d'optimisation du maillage

L'estimation d'erreur a posteriori fournit des indications locales (contributions élémentaires) et globales sur l'erreur de discrétisation spatiale. Celles-ci serviront par la suite au calcul de la taille optimale des éléments. On parle ainsi de la construction d'une carte de taille optimale qui sera la consigne fournie au générateur de maillage dans une procédure d'adaptation. Un maillage est qualifié d'optimal s'il minimise l'erreur pour un nombre d'éléments fixé (ou bien qui minimise le nombre d'éléments pour une précision donnée). On montre que pour qu'un maillage soit optimal, il suffit que l'erreur soit uniformément répartie sur tous les éléments [Zienkiewicz 87], [Coffignal 87], [Ainsworth 97]. En partant de ce principe, l'objectif d'une procédure d'adaptation est d'assurer une équidistribution de l'erreur sur tout le maillage [Zienkiewicz 87], [Coffignal 87], [Babuška 79], [Zienkiewicz 92(II)]. Dans ce qui suit, on étudiera deux types de stratégies d'optimisation de maillage : la première nous permet de calculer un maillage optimal pour une précision prescrite, tandis que la deuxième vise à optimiser un maillage sous la contrainte d'un nombre de degrés de liberté fixé.

3.4.1 Stratégie d'optimisation pour une précision imposée (SO1)

Cette première stratégie est la plus classique pour l'adaptation de maillage dans le cas de la *h*-adaptation. L'objectif est la construction d'un maillage optimal T^{opt} assurant un niveau de précision global imposé par l'utilisateur θ^{imp} . Cette condition donne une première procédure d'adaptation de maillage [Coffignal 87], [Zienkiewicz 87]. Soit alors θ_e la contribution d'un élément e à l'erreur estimée globale θ . Pour tous les estimateurs introduits dans le chapitre 2, celle-ci peut être écrite sous la forme suivante :

$$\theta = \left(\sum_{e \in T^{\text{perc}}} \theta_e^2 \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Supposons que le taux de convergence de la méthode des éléments finis est uniforme sur tout le domaine Ω et égal au taux théorique p : (le problème du traitement des singularités est abordé plus loin : § 3.5)

$$\theta = O(h^p) \quad (3.10)$$

On définit un coefficient de modification de taille élémentaire r_e tel que:

$$r_e = \frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} \quad (3.11)$$

où h_e et h_e^{opt} sont les tailles de l'élément e respectivement dans le maillage père et le maillage optimal fils T^{opt} .

Pour un raffinement uniforme, et à partir de (3.10) on peut écrire :

$$r_e^p = \frac{\theta_e^{\text{opt}}}{\theta_e} = \left(\frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} \right)^p \quad (3.12)$$

θ_e^{opt} est la contribution de l'élément e à l'erreur requise globale θ^{imp} dans le maillage optimal :

$$\theta^{\text{imp}} = \left(\sum_{e \in T^{\text{opt}}} \theta_e^{\text{opt}^2} \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

Soit d la dimension de l'espace, pour un élément e du maillage, r_e^{-d} est le nombre d'éléments nécessaire pour raffiner l'élément e . Pour un problème 3D si $r_e = 1/2$ il est nécessaire de subdiviser l'élément e en 8 éléments dans le maillage optimal. On définit ainsi le nombre total d'éléments du maillage optimal T^{opt} :

$$\text{Nbelt}^{\text{opt}} = \sum_{e \in T^{\text{père}}} \left(\frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} \right)^{-d} = r_e^{-d} \quad (3.14)$$

La condition d'optimalité du maillage T^{opt} conduit à uniformiser l'erreur θ^{uni} sur les nouveaux éléments, ce qui donne :

$$\forall e, (\theta_e^{\text{opt}})^2 = (\theta^{\text{uni}})^2 \left(\frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} \right)^{-d} \quad (3.15)$$

À partir de (3.15) et (3.13), l'erreur totale acceptée par l'utilisateur est donc

$$(\theta^{\text{imp}})^2 = (\theta^{\text{uni}})^2 \sum_{e \in T^{\text{père}}} \left(\frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} \right)^{-d} \quad (3.16)$$

D'après (3.12) et (3.15), on obtient la nouvelle expression du coefficient de modification de la taille :

$$r_e = \frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} = \left(\frac{\theta^{\text{uni}}}{\theta_e} \right)^{\frac{2}{2p+d}} \quad (3.17)$$

L'erreur uniforme à répartir sur tout le maillage θ^{uni} est alors calculée en fonction de l'erreur imposée par l'utilisateur à partir de (3.16) et (3.17), ce qui donne :

$$\theta^{\text{uni}} = \frac{(\theta^{\text{imp}})^{\frac{2p+d}{2p}}}{\left(\sum_{e \in T^{\text{père}}} (\theta_e)^{\frac{2d}{2p+d}} \right)^{\frac{2p+d}{4p}}} \quad (3.18)$$

L'expression finale du coefficient de modification de la taille s'écrit en fonction de l'erreur estimée, l'erreur imposée, la vitesse de convergence p et la dimension de l'espace d :

$$r_e = \frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} = \frac{(\theta^{\text{imp}})^{\frac{1}{p}}}{(\theta_e)^{\frac{2}{2p+d}} \left(\sum_{e \in T^{\text{père}}} (\theta_e)^{\frac{2d}{2p+d}} \right)^{\frac{1}{2p}}} \quad (3.19)$$

3.4.2 Stratégie d'optimisation pour un nombre d'éléments maximal imposé (S02)

Au cours de l'opération de forgeage, l'écoulement de la matière se complexifie à cause de l'augmentation de la déformation et de la modification de la géométrie de la pièce vers la forme finale. En conservant la première stratégie d'optimisation et en maintenant le niveau de précision fixé au début des calculs, le nombre d'éléments du maillage optimal augmente considérablement. Par conséquent la taille du problème devient de plus en plus importante et on est confronté à un risque de saturation des moyens et un arrêt imminent des calculs. L'objectif de cette deuxième stratégie est la construction d'un maillage optimal T^{opt} où l'erreur est uniformément répartie tout en conservant une taille de problème fixe. Cela revient à chercher la meilleure précision possible pour un nombre de degrés de liberté initialement fixé (i.e. nombre d'éléments du maillage optimal donné) [Coorevits 04]. Les maillages obtenus sont toujours optimaux dans la mesure où l'erreur est uniformément répartie. Bien entendu, La valeur de cette erreur augmente avec la complexification de l'écoulement.

Une autre motivation qui justifie cette stratégie est que, dans la pratique, on ne sait pas vraiment décider de la consigne d'erreur à imposer. Pour les problèmes non linéaires, et en faisant du raffinement adaptatif h itératif [Fourment 92], l'expérience montre que le nombre de nœuds peut être très sensible à la valeur de cette consigne. En effet, en 3D l'équation (3.21) montre que le nombre d'éléments est proportionnel à l'inverse de l'erreur au cube ($N_{\text{elt}} \propto (\theta^{\text{imp}})^{-d/p}$, avec $p = 1$ et $d = 3$). Pour passer d'une erreur de 15% à 10% on a besoin d'au moins 3 fois plus de nœuds (ou d'éléments):

$$\frac{\text{Nbelt}(10\%)}{\text{Nbelt}(15\%)} \approx (1,5)^3 = 3,4 \quad (3.20)$$

Sachant que pour le solveur utilisé le coût de calcul est proportionnel au nombre de nœuds à la puissance $3/2$ ($O(N^{3/2})$) celui-ci est multiplié par 6 ($(3,4)^{3/2} = 6.27$) pour passer de 15% à 10%.

Pour un problème donné, avec 15% d'erreur, on peut avoir des maillages peu raffinés, et en passant à 10% le maillage devient trop fin. En pratique on n'est pas capable de dire s'il faut imposer l'une ou l'autre des précisions (sauf dans l'alternative où l'on utiliserait un estimateur de l'erreur locale et sur une quantité précise pour laquelle il est plus facile de préciser le degré de précision souhaité). Par conséquent, travailler à un coût de calcul fixe se justifie pleinement et correspond à un souhait de l'utilisateur : faire les calculs les plus précis possibles pour une taille de problème fixée.

Soit $\text{Nbelt}^{\text{imp}}$ le nombre d'éléments maximal imposé par l'utilisateur, ayant déjà estimé l'erreur, on peut calculer l'erreur uniforme optimale à imposer θ^{opt} .

D'après (3.14) et (3.19) le nombre d'éléments imposé peut s'écrire en fonction de θ^{opt} :

$$\text{Nbelt}^{\text{imp}} = \sum_{e \in \Gamma^{\text{père}}} \left(\frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} \right)^{-d} = (\theta^{\text{opt}})^{-\frac{d}{p}} \left(\sum_{e \in \Gamma^{\text{père}}} (\theta_e)^{\frac{2d}{2p+d}} \right)^{\frac{2p+d}{2p}} \quad (3.21)$$

D'où l'erreur optimale uniforme :

$$\theta^{\text{opt}} = (\text{Nbelt}^{\text{imp}})^{-\frac{p}{d}} \left(\sum_{e \in \Gamma^{\text{père}}} (\theta_e)^{\frac{2d}{2p+d}} \right)^{\frac{2p+d}{2d}} \quad (3.22)$$

La nouvelle expression du coefficient de modification de taille s'écrit cette fois ci en fonction du nombre d'éléments imposé au lieu de l'erreur imposée :

$$r_e = \frac{h_e^{\text{opt}}}{h_e} = \frac{(\text{Nbelt}^{\text{imp}})^{-\frac{1}{d}} \left(\sum_{e \in \Gamma^{\text{père}}} (\theta_e)^{\frac{2d}{2p+d}} \right)^{\frac{1}{d}}}{(\theta_e)^{\frac{2}{2p+d}}} \quad (3.23)$$

Dans [Coorevits 04], les auteurs proposent d'autres stratégies d'optimisation qui sont parfaitement similaires à celle-ci. Elles consistent à chercher le maximum de précision à atteindre pour une taille mémoire fixée ou un temps de calcul CPU donné. Toutes ces stratégies ont pour objectif de contrôler la taille du problème étudié.

3.5 Traitement de la singularité du problème

Dans le calcul de la taille optimale, l'hypothèse d'un taux de convergence uniforme est mise en cause en présence d'une singularité. En effet, on a vu au chapitre précédant (§ 2.2.1) qu'au voisinage d'une singularité d'intensité λ , le taux de convergence de la méthode des

éléments finis est égal à $\min(p, \lambda)$. En pratique, ce problème du traitement des singularités est abordé par deux approches différentes :

3.5.1 Identification des singularités et calcul des taux de convergence réels

Cette première approche consiste à développer des techniques d'identification de la singularité du problème est à calculer le taux de convergence réel. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, Coorevits et al. [Coorevits 92], [Coorevits 92] ont proposé une méthode de détection automatique des nœuds singuliers et d'évaluation numérique de l'intensité de la singularité λ . La méthode consiste à utiliser les indications d'erreur locales θ_e autour d'un nœud. Une indication d'erreur nodale θ_n est alors calculée au nœud n par une simple moyenne des valeurs θ_e des éléments qui le contiennent. Cette valeur est par la suite comparée à la moyenne $\bar{\theta}_n$ des indications d'erreurs nodales sur tout le maillage. Le nœud est considéré comme singulier si :

$$\theta_n \geq \beta \bar{\theta}_n \quad (3.24)$$

β est un coefficient ajusté numériquement. Les auteurs ont proposé une valeur de 2.

Une fois le nœud singulier localisé, l'intensité de la singularité est déterminée en calculant la variation de l'énergie de déformation éléments finies $E_h(r)$ dans une région de rayon r autour du nœud n et en l'identifiant à l'expression théorique :

$$E(r) = K.r^{2(\lambda-1)} \quad (3.25)$$

où K est une constante.

Des résultats numériques montrent que l'approche permet d'évaluer λ avec une précision satisfaisante.

Cette approche peut être généralisée aux problèmes non linéaires. Néanmoins, la difficulté est de définir pour quelle valeur de β il y'a effectivement une singularité pour une famille de problèmes donnée. Par ailleurs, dans le cadre des problèmes 3D instationnaires en grandes déformations, la géométrie de la pièce évolue au cours de temps, par conséquent le nombre et la localité des nœuds singuliers évoluent. La localisation de ces derniers et le calcul des intensités des singularités peuvent générer des surcoût importants, sans garanti de l'efficacité du résultat.

Une deuxième approche [Le Dain 91] consiste à utiliser des maillages emboîtés pour calculer la vitesse de convergence sur chaque élément. Les éléments sur lesquels cette vitesse est inférieure à p , sont supposés contenir une singularité. Cependant, en pratique cette méthode est coûteuse sauf si elle est développée dans le cadre particulier d'une méthode de résolution multigrilles avec des maillages emboîtés.

3.5.2 Atténuation de l'effet de la singularité par itérations de maillages adaptatifs

Dans [Zienkiewicz 87], les auteurs proposent des applications d'adaptation de maillage sur différentes structures élastiques 2D présentant des singularités. Considérant une vitesse de convergence (théorique) uniforme, ils montrent que la succession de maillages adaptés permet d'atténuer l'effet de la singularité du problème et que la vitesse de convergence devient ainsi indépendante de celle-ci. La précision requise est atteinte après un nombre réduit d'itérations

de maillages adaptatifs. L'approche a été ensuite étendue et vérifiée sur un problème non linéaire [Zienkiewicz 88] (extrusion d'une préforme viscoplastique 2D).

Fourment [Fourment 92] a étudié l'influence de la singularité sur un problème d'indentation (figure 3.16) d'une préforme viscoplastique 2D. L'angle droit du poinçon fait apparaître une singularité dans l'écoulement.

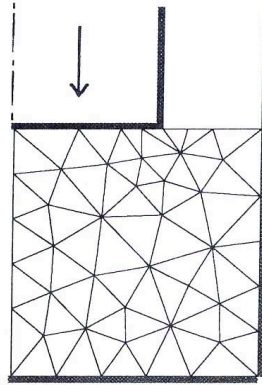


Figure 3.16 [Fourment 92] : Problème d'indentation avec singularité

L'erreur estimée initiale est de 17%. L'objectif étant d'atteindre une précision de l'ordre de 5% avec un raffinement de maillage itératif. Les résultats d'adaptation en terme de précision sont réunis dans le tableau 3.1, et les maillages obtenus sont représentés sur la figure 3.17. Ces résultats montrent qu'au bout de 3 itérations la précision requise est atteinte. Ceci confirme que sous l'hypothèse d'une vitesse de convergence uniforme pour la h -adaptation, peu d'itérations suffisent pour faire disparaître l'effet de la singularité et construire un maillage à la précision voulue.

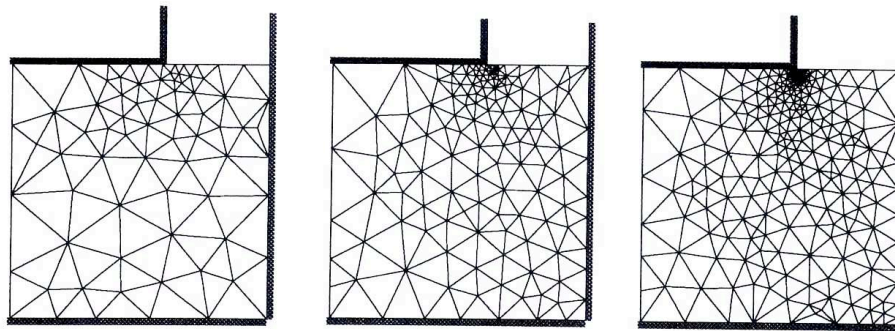


Figure 3.17 [Fourment 92] : Maillages obtenus par la procédure d'adaptation

Consigne	Erreur estimée	Nb degrés de liberté
8,8 %	13,8 %	524
6,9 %	7,8 %	1098
5 %	4,7 %	2086

Tableau 3.1 [Fourment 92] : traitement itératif de la singularité dans la procédure de maillage adaptatif

Dans le cadre de ce travail, cette dernière approche est retenue. Nous supposons que la vitesse de convergence est uniforme. Quant au choix de sa valeur, en théorie, elle est égale à 1 pour des éléments linéaires. Ceci est vérifié dans le cas de problèmes linéaires [Perchat 00]. Pour les problèmes non linéaires, la vitesse de convergence dépend a priori des coefficients de

la loi de comportement. Dans la pratique, il est courant de considérer que cette valeur reste proche de 1 par valeurs inférieurs, et de la prendre égale à 1 pour les calculs de la carte de taille [Zienkiewicz 88], [Dyduch 95].

Chapitre 4

Techniques de recouvrement

Résumé :

Dans ce chapitre on étudie les différentes techniques de recouvrement utilisées dans le calcul d'estimation d'erreur a posteriori de type Zienkiewicz-Zhu : la technique SPR (Superconvergent Patch Recovery), la technique de différences finies locales (ou technique de Liszka-Orkisz) et la technique REP (Recovery by Equilibrium in Patches). Nous proposons des alternatives de ces techniques susceptibles d'augmenter leur efficacité et nous présentons également une variante de la technique SPR, que l'on appellera technique MPR (Minimal Patch Recovery).

4.1 Introduction

Dans la méthode des éléments finis, les contraintes calculées sont généralement discontinues à l'interface des éléments. L'origine de cette discontinuité est le choix de l'interpolation C^0 du champ de déplacement. Sachant que la solution exacte du problème est continue, des techniques de post-traitement locales et globales sont utilisées pour construire une solution continue à partir de la solution éléments finis. Selon l'efficacité de la technique utilisée, la solution continue obtenue peut être une bonne approximation de la solution exacte du problème. Les techniques de recouvrement font partie de ces techniques de post-traitement locales largement utilisées, elles allient efficacité et facilité de mise en œuvre pour de faibles coûts de calculs. Leur principe est de construire localement des contraintes continues qui approchent le mieux possible la solution exacte. Dans ce chapitre, on s'intéressera à l'étude des techniques de recouvrement les plus répandues, et qui sont utilisées dans le cadre de l'estimation d'erreur a posteriori de type Z^2 .

4.2 Technique SPR (Superconvergent Patch Recovery)

4.2.1 Principe de la technique

Il a été démontré dans [Barlow 76], [Wheeler 87], [Babuška 96] que dans le cadre de la méthode des éléments finis, la précision des calculs n'est pas uniforme et qu'il existe des points particuliers au niveau desquels la solution est de meilleure qualité qu'ailleurs et converge avec un taux plus élevé que le taux de convergence éléments finis :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \|e_h\| = O(h^{p+\alpha}) \quad (4.1)$$

où p est le taux de convergence de la méthode des éléments finis.

Dans le cas où $\alpha \geq 1$ dans (4.1), la solution est dite *superconvergente* et les points présentant cette propriété sont appelés des points *superconvergents* ou points optimaux ou encore les points de Barlow par référence aux travaux de Barlow [Barlow 76] qui a démontré leur existence. Pour les champs de gradients éléments finis (contraintes, déformations, etc.) ces points se situent au niveau de quelques points de Gauss particuliers [Zienkiewicz 00] (voir figure 4.1).

Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92(I)] ont utilisé cette propriété de la méthode des éléments finis pour améliorer l'estimateur d'erreur Z^2 [Zienkiewicz 87] (cf. § 2.2.2.5). L'approche proposée consiste à faire un recouvrement¹ des contraintes dans des patches topologiques² à partir des valeurs superconvergentes aux points de Gauss (figure 2.2). Il s'agit de calculer, à partir de celles ci, une expansion polynomiale du champ de contrainte dans chaque patch considéré. Le degré de cette expansion est généralement le même que le degré d'interpolation du champ de déplacement. Cette nouvelle technique, appelée technique SPR, permet de construire un champ de contrainte $\tilde{\sigma}_h$ continu et qui présente les propriétés de superconvergence observées au niveau des points de Gauss. Dans [Zienkiewicz 92(I)], les

¹ Recouvrement : action de recouvrir (recouvrement des forces, de la santé, une chose perdue, etc. [Larousse 2001]), dans le contexte des techniques de recouvrement, il s'agit de recouvrir (retrouver) les propriétés de superconvergence dans la solution $\tilde{\sigma}_h$.

² Un patch topologique, ou patch élément finis, est un sous-domaine de maillage centré sur un nœud et composé de l'ensemble des éléments connectés à ce nœud (voir figure 4.2).

auteurs montrent qu'elle est plus efficace et plus robuste que la technique de projection globale (2.58), et permet ainsi d'améliorer l'estimateur d'erreur (2.55). En effet, lorsque $\tilde{\sigma}_h$ est superconvergente alors on peut montrer que l'estimateur Z^2 est asymptotiquement exact ($\xi \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$ c à d. $\|\sigma - \sigma_h\|_E \rightarrow 0$) :

L'estimation de l'erreur exacte $\|\sigma - \sigma_h\|_E$ est donnée par :

$$\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_E = \|(\sigma - \sigma_h) - (\sigma - \tilde{\sigma}_h)\|_E \quad (4.2)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on peut écrire :

$$\|\sigma - \sigma_h\|_E - \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_E \leq \|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_E \leq \|\sigma - \sigma_h\|_E + \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_E \quad (4.3)$$

En divisant tous les termes par $\|\sigma - \sigma_h\|_E$ on obtient un encadrement de l'indice d'efficacité de l'estimateur Z^2 :

$$\left(1 - \frac{\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_E}{\|\sigma - \sigma_h\|_E}\right) \leq \xi \leq \left(1 + \frac{\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_E}{\|\sigma - \sigma_h\|_E}\right) \quad (4.4)$$

Si on considère que le taux de convergence de l'erreur éléments finis est égal p (c.f. § 2.2.1) alors :

$$\|\sigma - \sigma_h\| = O(h^p) \quad (4.5)$$

Et si on suppose que la solution $\tilde{\sigma}_h$ converge plus rapidement que la solution éléments finis, d'après (4.1):

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \|\sigma - \tilde{\sigma}_h\| = O(h^{p+\alpha}) \quad (4.6)$$

La condition (4.4) s'écrit :

$$1 - O(h^\alpha) \leq \xi \leq 1 + O(h^\alpha) \quad (4.7)$$

Cette dernière équation montre qu'il suffit que $\tilde{\sigma}_h$ ait un taux de convergence supérieur à p pour que l'indice d'efficacité de l'estimateur Z^2 tende vers 1 lorsque la taille h des éléments tend vers 0. Toutefois, la superconvergence n'est pas une condition nécessaire à l'utilisation de ce type d'estimateur. En effet, si on vérifie par exemple, sans avoir $\alpha > 0$, que quelque soit la taille des éléments du maillage (ou au moins lorsque h tend vers 0):

$$\frac{\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_E}{\|\sigma - \sigma_h\|_E} = \varepsilon \leq 0.2 \quad (4.8)$$

d'après (4.4) on aura :

$$0.8 \leq \xi \leq 1.2 \quad (4.9)$$

Dans cet intervalle d'efficacité, l'estimation d'erreur est considérée comme fiable sans être asymptotiquement exact.

L'étude numérique de Babuška et Strouboulis [Babuška 94] sur l'efficacité de différents types d'estimateurs d'erreur montre que dans le cas de maillages arbitraires, où les propriétés de superconvergence ne sont pas toujours vérifiées, l'estimateur Z^2 est toujours le plus efficace et le plus robuste.

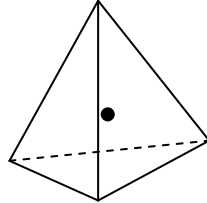
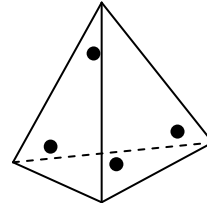
Ordre	Figure	Coordonnées tétraédriques
Linéaire		$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$
Quadratique		$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) ; \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) ; \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

Figure 4.1: Localisation des points superconvergents pour le recouvrement des contraintes dans le cas des éléments tétraédriques

4.2.2 Recouvrement des contraintes par la technique SPR

Soit Ω_k un patch topologique centré sur un nœud k et contenant NE éléments tel que $\Omega_k = \bigcup_{e=1}^{NE} \Omega^e$ (figure 4.2). La technique SPR consiste à calculer une expansion polynomiale de chaque composante du tenseur des contraintes éléments finis sur chaque patch Ω_k telle que :

$$\tilde{\sigma}_h^k(x, y, z) = P \cdot a^k \quad (4.10)$$

où P constitue la base de l'expansion polynomiale et a^k est le vecteur contenant les coefficients du polynôme dans le patch Ω_k . Pour un problème 3D et pour des éléments linéaires :

$$P = (1, x, y, z) \quad \text{et} \quad a^k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, a_4^k)^t \quad (4.11)$$

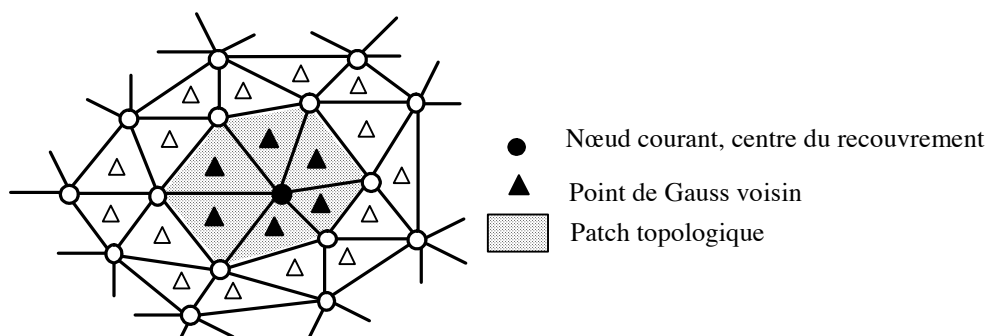


Figure 4.2 : Patch topologique 2D avec des triangles linéaires

La détermination des coefficients a_i^k pour chaque composante du tenseur des contraintes consiste à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\Pi(a^k) = \sum_{i=1}^{NG} (\sigma_h(i) - \tilde{\sigma}_h^k(i))^2 = \sum_{i=1}^{NG} (\sigma_h(i) - P(x_i, y_i, z_i).a^k)^2 \quad (4.12)$$

où $\sigma_h(i)$ est la solution éléments finis calculée au point de Gauss i de coordonnées (x_i, y_i, z_i) . NG est le nombre total de points de Gauss dans le patch. Si NG^e est le nombre de points de Gauss par élément alors $NG = NG^e \times NE$. Pour des éléments linéaires $NG^e = 1$ donc $NG = NE$.

Le problème de minimisation s'écrit :

$$\forall i = 1..4, \quad \frac{\partial \Pi(a^k)}{\partial a_i^k} = 0 \quad (4.13)$$

ce qui revient à la résolution du système suivant:

$$\sum_{i=1}^{NG} P^t(x_i, y_i, z_i) P(x_i, y_i, z_i) a^k = \sum_{i=1}^{NG} P^t(x_i, y_i, z_i) \sigma_h(i) \quad (4.14)$$

Le vecteur des coefficients est donc $a^k = A^{-1}b$, la matrice A et le vecteur b sont donnés par :

$$A = \sum_{i=1}^{NG} P^t(x_i, y_i, z_i) P(x_i, y_i, z_i) = \sum_{i=1}^{NG} \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ x_i & (x_i)^2 & x_i y_i & x_i z_i \\ y_i & y_i x_i & (y_i)^2 & y_i z_i \\ z_i & z_i x_i & z_i y_i & (z_i)^2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$b = \sum_{i=1}^{NG} P^t(x_i, y_i, z_i) \sigma_h(i) = \sum_{i=1}^{NG} \sigma_h(i) \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Le nombre d'équations du système à résoudre par composante de contrainte est égal au nombre des paramètres de l'expansion polynomiale P . Le coût de calcul de la résolution est donc négligeable par rapport à un incrément de calcul éléments finis. On note que les six systèmes à résoudre, relatifs aux six composantes du tenseur des contraintes, sont totalement découplés.

La valeur nodale $\tilde{\sigma}^k$ est calculée au nœud k en insérant ses coordonnées dans l'expansion polynomiale ainsi déterminée :

$$\tilde{\sigma}^k = \tilde{\sigma}_h^k(x_k, y_k, z_k) = P(x_k, y_k, z_k).a^k \quad (4.17)$$

La contrainte continue $\tilde{\sigma}_h$ est calculée en interpolant les valeurs de $\tilde{\sigma}_h^k$ par les fonctions d'interpolations de base éléments finis :

$$\tilde{\sigma}_h(x, y, z) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \tilde{\sigma}_h^k N_k(x, y, z) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} P(x_k, y_k, z_k).a^k N_k(x, y, z) \quad (4.18)$$

où N_k est la fonction d'interpolation au nœud k .

Remarque

Dans certains cas, la résolution du système (4.14) peut présenter des instabilités numériques. Celle-ci risquent d'apparaître lorsque des degrés d'interpolation élevés sont utilisés. Dans ce cas, la matrice du système A est mal conditionnée. Afin d'éviter ce problème Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92] proposent une normalisation du système de coordonnées (figure 4.3).

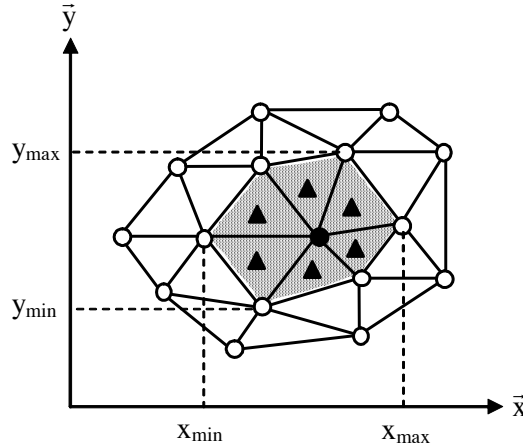


Figure 4.3: Normalisation du système de coordonnées dans le patch

Elle consiste à introduire des nouvelles coordonnées locales \bar{x} , \bar{y} et \bar{z} telles que :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -1 + 2 \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \\ \bar{y} &= -1 + 2 \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \\ \bar{z} &= -1 + 2 \frac{z - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}}\end{aligned}\tag{4.19}$$

$(x_{\min}, y_{\min}, z_{\min})$ et $(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})$ sont respectivement les coordonnées minimales et maximales dans le patch (figure 4.3). Cette normalisation revient à encadrer toutes les nouvelles coordonnées des points d'intégration dans le patch considéré entre -1 et 1 ($-1 \leq \bar{x} \leq 1, -1 \leq \bar{y} \leq 1, -1 \leq \bar{z} \leq 1$) ce qui donne un meilleur conditionnement de la matrice A quelque soit le degré d'interpolation.

Wiberg et Abdulwahab [Wiberg 93] ont proposé une autre normalisation afin d'éviter le même problème. Ils ont introduit un nouveau système de coordonnées locales (ξ, η, ζ) tels que :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x - d_m}{DJ} \\ \eta &= \frac{y - d_m}{DJ} \\ \zeta &= \frac{z - d_m}{DJ}\end{aligned}\tag{4.20}$$

où

$$DJ = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2}, d_m = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2} \quad (4.21)$$

$$d_{\max} = \max(x_{\max}, y_{\max}), d_{\min} = \min(x_{\min}, y_{\min})$$

4.2.3 Recouvrement SPR sur la frontière du domaine

En ce qui concerne les nœuds frontières (figure 4.4), dans la majorité des cas le nombre de points d'intégration est insuffisant pour la détermination des coefficients de l'expansion polynomiale (4.10). La matrice A (4.15) du système des moindres carrés est en effet non inversible. Pour un nœud frontière k , Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92], [Zienkiewicz 92(I)] proposent de calculer la valeur de $\tilde{\sigma}^k$ à partir du patch topologique centré sur un nœud interne l voisin le plus proche de k . Ainsi $\tilde{\sigma}^k$ est la valeur de $\tilde{\sigma}_h^l$ au nœud k .

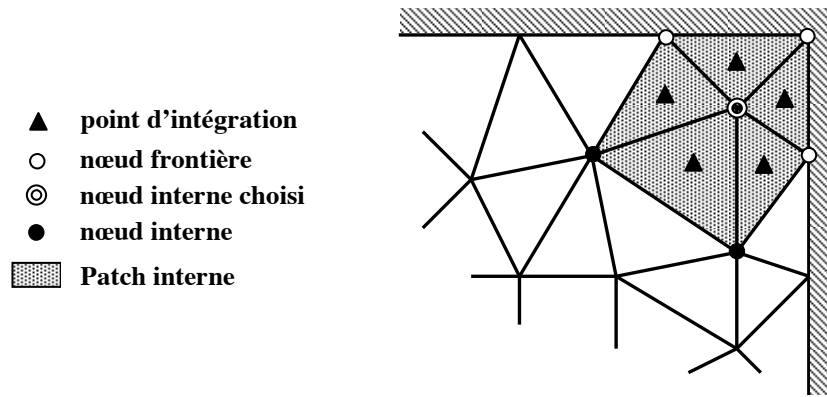


Figure 4.4 : Recouvrement sur les nœuds frontières en 2D

La qualité de la solution calculée à un nœud interne au domaine est meilleure que celle calculée à un nœud frontière. Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92(I)] ont montré par exemple que dans le cas d'éléments quadratiques, la convergence en $O(h^4)$ des contraintes recouvrées $\tilde{\sigma}_h$ n'est observée qu'au niveau des nœuds internes. La convergence au niveau des nœuds frontières est seulement en $O(h^3)$.

4.2.4 Technique SPR améliorée

Grâce à son efficacité et sa facilité de mise en œuvre, la technique SPR a bénéficié d'un large intérêt par la communauté des analystes du calcul adaptatif. Plusieurs travaux de recherche ont été dédiés à l'amélioration des performances de la technique et de nouvelles approches ont été proposées.

Wiberg et Abdulwahab [Wiberg 93], [Abdulwahab 95] ont proposé une première alternative de la technique SPR, appelée SPRE (Superconvergent Patch Recovery incorporating Equilibrium). Elle consiste à prendre en compte le défaut d'équilibre de la solution $\tilde{\sigma}_h$ calculée par le recouvrement SPR. Ils ont introduit un nouveau terme dans la fonction à minimiser (4.12) qui représente le résidu de l'équation d'équilibre :

$$R_{eq} = \text{div} \tilde{\sigma}_h + f \quad (4.22)$$

où f est le vecteur des forces volumiques.

Pour déterminer les paramètres de l'expansion polynomiale on minimise la fonctionnelle suivante :

$$\Pi'(a^k) = \Pi(a^k) + \beta \int_{\Omega_k} R_{eq}^t(a^k) \cdot R_{eq}(a^k) d\omega \quad (4.23)$$

où β est un facteur de pénalisation associé au terme du résidu. Il permet de faire varier le poids de ce terme dans la fonctionnelle à minimiser par rapport au terme de superconvergence $\Pi(a^k)$. Les études numériques [Wiberg 93] ont montré que les résultats sont pratiquement insensibles aux variations de β entre 0,5 et 1000. Au-delà de la valeur 1000 apparaissent des instabilités numériques. Une valeur de $\beta=1$ est généralement satisfaisante [Wiberg 03]. Dans le cas où $\beta=0$ le système à résoudre correspond au système du recouvrement SPR.

La condition d'équilibre crée un couplage entre toutes les composantes du tenseur des contraintes. Par conséquent, l'intégration de la fonctionnelle relative au terme du résidu dans le problème de minimisation (4.23) crée un couplage entre les systèmes à résoudre. Ceci n'est pas le cas lors de la minimisation de la fonctionnelle $\Pi(a^k)$ pour la technique SPR où les systèmes sont découplés. D'autre part, la minimisation fait apparaître les dérivées du terme de résidu. Contrairement à la technique SPR, le degré de l'expansion polynomiale doit être d'ordre supérieur au degré des fonctions d'interpolation du champ de déplacement éléments finis.

Dans le cas de nœuds frontières, les auteurs de [Wiberg 93] proposent d'utiliser le patch frontière comme support du recouvrement en réduisant le degré de l'expansion polynomiale (les dérivés du terme de résidu étant éliminées). Dans le cas où la quantité d'information dans le patch ne permet pas de résoudre le problème, les auteurs recommandent la même approche que Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92] (considérer le patch du nœud intérieur voisin le plus proche).

Malgré l'apport de la technique SPRE par rapport à la technique SPR en terme de précision, la technique ne permet pas d'améliorer l'efficacité du recouvrement au niveau des nœuds frontières ce qui est l'inconvénient principal de la technique SPR. Une nouvelle amélioration a été suggérée par Wiberg et al. [Wiberg 94] et Abdulwahab [Abdulwahab 95]. Elle consiste à introduire des termes relatifs aux conditions aux limites dans le problème de minimisation : c'est la technique SPREB (Superconvergent Patch Recovery incorporating Equilibrium and Boundary conditions). Les auteurs distinguent deux cas de configuration.

- a - Cas de conditions aux limites de type tractions imposées

Dans ce cas, un terme de résidu relatif à la non satisfaction des conditions aux limites en de traction est introduit :

$$R_{\sigma_B} = \omega_{\sigma_B} (\tilde{\sigma}_h \cdot n - T^0) \quad (4.24)$$

où ω_{σ_B} est une fonction de pondération qui permet de varier l'influence du terme R_{σ_B} par rapport aux autres termes de la fonctionnelle à minimiser. T^0 est le vecteur des tractions imposées et n est la normale à la surface chargée.

Le terme de résidu est intégré sur la surface du patch appartenant à la frontière chargée. Il est par la suite introduit dans la fonctionnelle à minimiser (4.23) :

$$\Pi'(a^k) = \Pi(a^k) + \beta \int_{\Omega_k} R_{eq}^t(a^k) \cdot R_{eq}(a^k) d\omega + \omega_{\sigma_B}^2 \int_{\Gamma_k^T} R_{\sigma_B}^t(a^k) \cdot R_{\sigma_B}(a^k) ds \quad (4.25)$$

où Γ_k^T est la surface du patch centré au nœud k et appartenant à la frontière chargée Γ^T .

La figure 4.5 montre que la prise en compte des résidus relatifs aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites améliore la précision de la solution recouverte par rapport à la technique SPR. D'autre part les résultats montrent que la prise en compte seulement du résidu de l'équation d'équilibre n'améliore pas significativement la précision de la technique SPR. Concernant le taux de convergence, la figure 4.5-b montre que les technique SPRE et SPREB n'améliorent pas le taux de convergence de la solution SPR. D'autres problèmes étudiés [Wiberg 94] ont permis de tirer les mêmes conclusions.

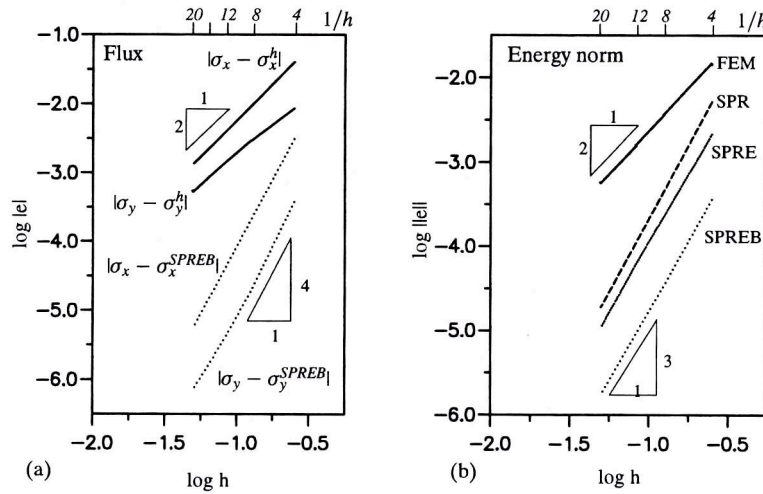


Figure 4.5 : Taux de convergence et précision de la techniques SPR, SPRE et SPREB [Wiberg 94]

(a) erreur sur les contraintes, (b) erreur en norme en énergie

Problème étudié : équation de Poisson avec des conditions aux limites de type Dirichlet,

$$u_{exact} = (x^3 + y^2) \sin(xy)$$

- b - Cas de conditions aux limites de type déplacements imposés

Dans ce cas, les auteurs suggèrent de faire le recouvrement sur le champ de déplacement et non pas sur les contraintes. Pour le cas des éléments linéaires, les points superconvergents du champ de déplacement sont les nœuds du maillage. Le terme de résidu relatif à la non satisfaction des conditions aux limites en déplacement s'écrit :

$$R_{u_B} = \omega_{u_B} (\tilde{u}_h - u^0) \quad (4.26)$$

où ω_{u_B} est une fonction de pondération analogue à ω_{σ_B} et \tilde{u}_h est le champ de déplacement recouvert tel que :

Pour tout noeud k ,

$$\tilde{u}_h^k = P \cdot a^k \quad \text{et} \quad \tilde{u}_h = \sum_k^{Nbnoe} \tilde{u}_h^k N_k \quad (4.27)$$

Pour des éléments linéaires, l'expansion en déplacement est quadratique :

$$P = (1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz) \quad (4.28)$$

$$a^k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, a_4^k, a_5^k, a_6^k, a_7^k, a_8^k, a_9^k, a_{10}^k)^t$$

La nouvelle fonctionnelle à minimiser s'écrit donc :

$$\Pi(a^k) = \sum_{i=1}^{Ni} (u_h^i - P a^k)^2 + \beta \int_{\Omega_k} R_{eq}^t(a^k) \cdot R_{eq}(a^k) d\omega + \omega_{u_B}^2 \sum_{j=1}^{Nf} (R_{u_B}^j(a^k))^t \cdot R_{u_B}^j(a^k) \quad (4.29)$$

où Ni est le nombre total des nœuds intérieurs dans le patch et Nf est le nombre des nœuds qui appartiennent à la frontière où les déplacements sont imposés.

Blacker et Belytschko [Blacker 94] ont amélioré la technique SPR en introduisant les équations du résidu de l'équilibre et des conditions aux limites en utilisant ce qu'ils appellent des polynômes conjoints. Les auteurs ont souligné que l'interpolation des valeurs nodales des contraintes (équation(4.18)) ne permet pas de profiter entièrement de l'efficacité de la technique. Les contraintes $\tilde{\sigma}^k$ sont généralement plus précises que les valeurs interpolées aux éléments. Ils ont introduit la notion de polynôme conjoint qui est une interpolation des expansions polynomiales calculées sur le patch. En effet, dans le technique SPR standard, les contraintes recouvrées sont calculées aux nœuds en introduisant leurs coordonnées dans l'expansion polynomiale puis elles sont interpolées aux éléments (équation (4.18)). Selon l'approche introduite par Blacker et Belytschko [Blacker 94], ce sont les expansions polynomiales qui sont interpolées pour calculer le polynôme conjoint :

$$\tilde{\sigma}_h(x, y, z) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \tilde{\sigma}_h^k(x, y, z) N_k = \sum_{k=1}^{Nbnoe} P(x, y, z) \cdot a^k N_k \quad (4.30)$$

La contrainte recouvrée $\tilde{\sigma}_h$ est appelée polynôme conjoint.

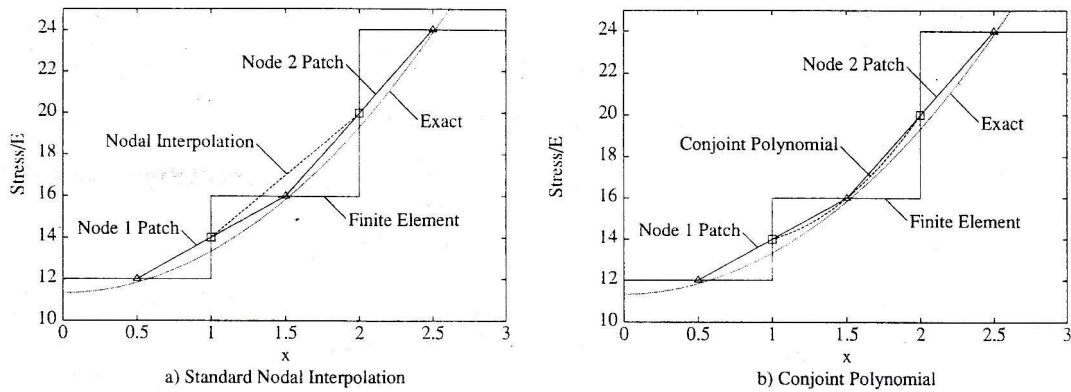


Figure 4.6 : effet de l'interpolation sur la précision du recouvrement sur les éléments linéaires [Blacker 94]

(a) interpolation SPR standard, (b) calcul par polynôme conjoint

Problème étudié : poutre 1D élastique encastrée avec un déplacement imposé à son extrémité libre

Les résultats du graphe 4.6 montrent que la solution calculée par l'approche du polynôme conjoint au niveau du deuxième élément fini (intervalle [1,2]) est plus proche de la solution exacte du problème.

Les résultats numériques [Blacker 94] montrent que dans le cas des éléments quadratiques l'approche du polynôme conjoint n'améliore pas d'une manière significative la

précision par rapport à l'interpolation standard. D'autre part, et d'une manière générale, l'apport des résidus relatifs aux conditions aux limites en terme de précision est plus marqué. Finalement, les auteurs ont souligné la sensibilité de la technique SPR à la qualité du maillage. L'introduction des résidus d'équilibre dans l'approche SPR est un moyen efficace pour assurer la fiabilité indépendamment de la qualité du maillage.

4.2.5 Synthèse

La technique SPR introduite par Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92(I)] réunit efficacité et simplicité. Les études numériques citées précédemment [Zienkiewicz 92], [Zienkiewicz 92(I)], [Zienkiewicz 92(II)], [Wiberg 93], [Wiberg 94] et [Blacker 94] ont montré la fiabilité de cette approche dans l'estimation d'erreur a posteriori. L'étude de cette technique nous a permis de noter les points suivants :

- le recouvrement au niveau de la frontière est le point faible de la technique ;
- l'approche de Wiberg et Abdulwahab [Wiberg 93] qui consiste en la prise en compte des termes de résidu d'équilibre (SPRE) n'améliore pas de manière significative la précision de la technique SPR dans la mesure où le problème des nœuds frontières n'est pas résolu. Néanmoins, cette approche est significativement plus fiable dans le cas de maillages de mauvaise qualité ;
- l'introduction des résidus des conditions aux limites avec le résidu de l'équilibre (approche SPREB [Wiberg 94]) permet d'améliorer la fiabilité du recouvrement au niveau de la frontière ;
- l'approche du polynôme conjoint introduite par Blacker et Belytschko [Blacker 94] n'améliore pas significativement la précision de la technique SPR ;

4.3 Technique des différences finies locales

4.3.1 Principe de la technique

Cette technique développée par Liszka et Orkisz [Liszka 80], [Liszka 84] et qu'on appellera dans la suite technique LO, est très semblable à la technique SPR. Initialement elle a été utilisée pour calculer des dérivées continues aux nœuds à partir d'une grille de différences finies [Liszka 84]. Bertrand et al. [Bertrand 86] l'ont appliquée dans le cadre de la simulation numérique du laminage pour lisser les déviateurs de contrainte d'une loi viscoplastique. Leurs résultats numériques montrent que les déviateurs lissés par la technique LO sont très proches de la solution exacte et des résultats expérimentaux et convergent plus rapidement que la solution éléments finis standard. Fourment [Fourment 92] et Dyduch [Dyduch 96] l'ont adoptée pour le calcul d'estimation d'erreur a posteriori de type Z^2 dans le cadre de la simulation numérique des procédés de mise en forme des matériaux avec des lois de comportement viscoplastiques.

Le principe de la technique consiste en un développement en séries de Taylor sur chaque nœud de maillage afin de calculer des dérivées d'une fonction jusqu'à un certain ordre. Le nœud considéré est le centre d'un « voisinage » ou « patch différences finies » formé de nœuds voisins à ce nœud (figure 4.7). Fourment [Fourment 92] ainsi que Bertrand et al. [Bertrand 86] ont utilisé un développement de Taylor à l'ordre 2 pour calculer le tenseur des déformations recouvert $\tilde{\epsilon}_n$ à partir des dérivées du champ de déplacement.

Soit u le champ de déplacement, k un nœud du maillage et l un nœud voisin :

$$\forall i = 1, \dots, 3, u_l^i = u_k^i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_k^i}{\partial x_j} \Delta x_j^l + \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_k^i}{\partial x_j \partial x_m} \Delta x_j^l \Delta x_m^l + O_i((\Delta r_l)^3) \quad (4.31)$$

avec :

$$\forall j = 1, \dots, 3, \Delta x_j^l = x_j^l - x_j^k \text{ et } \Delta r_l = \left(\sum_{j=1}^3 (\Delta x_j^l)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

Le développement de Taylor est écrit pour toutes les composantes du vecteur déplacement.

Les dérivées du champ de vitesse $\frac{\partial u_k^i}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 u_k^i}{\partial x_j \partial x_m}$ doivent minimiser la fonctionnelle :

$$\forall i = 1, \dots, 3, \Pi_i^{DF} = \sum_{l \in \theta(k)} \left(\frac{O_i(\Delta r_l^3)}{\Delta r_l^3} \right)^2 \quad (4.33)$$

où $\theta(k)$ est le voisinage de k et $O((\Delta r_l)^3)$ est calculé à partir de (4.31). $((\Delta r_l)^3)^{-1}$ est un terme de pondération fonction des coordonnées des voisins. Il permet de faire varier le poids des contributions des voisins dans le patch. Ce poids est d'autant plus important que le voisin est plus proche du nœud centre de recouvrement.

La minimisation de Π^i conduit à la résolution d'un système linéaire 9×9 de la forme $A.x = b$. Ce système est bien défini (i.e. la matrice A est inversible) lorsque le nombre de voisins dans $\theta(k)$ est suffisant. Afin d'améliorer la précision de la solution recouverte et éviter les singularités qui risquent d'apparaître dans la système, Liszka [Liszka 84] a suggéré l'augmentation du nombre de voisins dans le patch. Il est d'usage d'utiliser 10 voisins en 2D [Fourment 95], [Dyduch 96] et 26 en 3D.

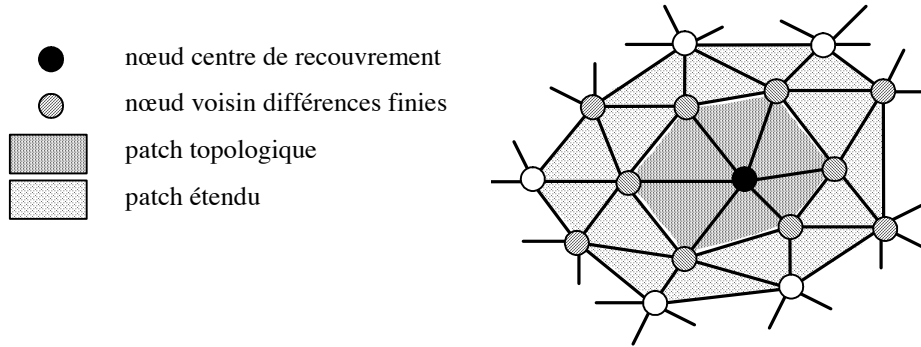


Figure 4.7 : Patch différences finies 2D avec des triangles linéaires

Après détermination des solutions $\left(\frac{\partial u_k^i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_k^i}{\partial x_j \partial x_m} \right)_{i,j,m}$ le tenseur des vitesses de déformation recouvert $\tilde{\varepsilon}^k$ au nœud k s'écrit :

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k^j}{\partial x_i} \right) \quad (4.34)$$

De la même manière que dans la technique SPR, La solution recouvrée est interpolée aux éléments du maillage par les fonctions d'interpolation de base :

$$\tilde{\epsilon}_h = \sum_{k=1}^{Nbnoe} \tilde{\epsilon}^k N_k \quad (4.35)$$

À partir la loi de comportement (2.19) par exemple on calcule la contrainte $\tilde{\sigma}_h$:

$$\tilde{\sigma}_h = C \tilde{\epsilon}_h \quad (4.36)$$

Dyduch [Dyduch 96] a utilisé la technique LO pour calculer des contraintes recouvrées à partir des contraintes éléments finis aux points de Gauss. Pour des contraintes linéaires, un développement de Taylor à l'ordre 1 est suffisant. Soit k un nœud du maillage et i un point de Gauss voisin, le développement de Taylor s'écrit :

$$\sigma_h(i) = \tilde{\sigma}^k + \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial z} \Delta z_i + O((\Delta r_i)^2) \quad (4.37)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x^i - x^k \\ \Delta y_i &= y^i - y^k \\ \Delta z_i &= z^i - z^k \end{aligned} \quad (4.38)$$

Les inconnues du système sont $\left(\tilde{\sigma}^k, \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial z} \right)$, elles doivent minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\Pi^{DF} = \sum_{i \in \vartheta(k)} \frac{1}{\Delta r_i^4} \left(\sigma_h(i) - \tilde{\sigma}^k - \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial x} \Delta x_i - \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial y} \Delta y_i - \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial z} \Delta z_i \right)^2 = \sum_{i \in \vartheta(k)} \frac{O((\Delta r_i)^2)}{\Delta r_i^4} \quad (4.39)$$

où $\vartheta(k)$ est le voisinage de points de Gauss du nœud k .

Le système à résoudre est de la forme $A.x = b$ et s'écrivant

$$A = \sum_{i \in \vartheta(k)} \frac{1}{\Delta r_i^4} \begin{pmatrix} 1 & \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \\ \Delta x_i & (\Delta x_i)^2 & \Delta x_i \Delta y_i & \Delta x_i \Delta z_i \\ \Delta y_i & \Delta y_i \Delta x_i & (\Delta y_i)^2 & \Delta y_i \Delta z_i \\ \Delta z_i & \Delta z_i \Delta x_i & \Delta z_i \Delta y_i & (\Delta z_i)^2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$$b = \sum_{i \in \vartheta(k)} \sigma_h(i) \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

On remarque que dans le cas où $\Delta r_i = 1$ dans (4.39) le système de minimisation Π^{DF} est le même que dans le cas de recouvrement SPR. En effet, un recouvrement de type SPR avec une expansion linéaire est équivalent à un développement de Taylor au premier ordre. Les inconnues du problème sont :

$$\begin{aligned} a_1^k &= \tilde{\sigma}^k \\ a_2^k &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial x} \\ a_3^k &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial y} \\ a_4^k &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_h^k}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dans ce cas ($\Delta r_i = 1$), si on considère le même voisinage (i.e. patch topologique = patch différences finies) les deux techniques donnent évidemment le même résultat. La technique LO peut être vue comme une généralisation de la technique SPR à des patches de forme quelconque et de nombre de nœuds variable.

Remarque

Des tests numériques centrés sur le choix et le nombre de voisins dans le patch (cf. chapitre 5) ont montré que pour la technique LO, le patch topologique (patch éléments finis) est un choix optimal pour les nœuds internes (lorsque le patch topologique est suffisant). LO permet d'étendre la méthode aux nœuds de la frontière. En considérant des patches topologiques, la technique LO revient à faire un recouvrement de type SPR en pondérant la contribution des voisins par les poids $((\Delta r_i)^3)^{-1}$ (4.33). Ce recouvrement SPR avec pondération de type différences finies, nous l'appellerons «recouvrement SPR-P». Il nous permettra par la suite d'étudier l'effet de la pondération sur la précision du recouvrement SPR standard. Pour un recouvrement SPR-P sur la frontière du domaine, on considère la même approche que dans la technique SPR, en choisissant le patch d'un nœud voisin intérieur au domaine.

4.3.2 Définition du voisinage différences finies

La définition des voisins est la clé de la technique LO. Si le nombre de voisins est insuffisant ou si les voisins sont mal choisis la matrice du système à résoudre n'est pas inversible. D'autre part si le patch différences finies est trop étendu la solution recouverte risque de s'éloigner de la solution exacte

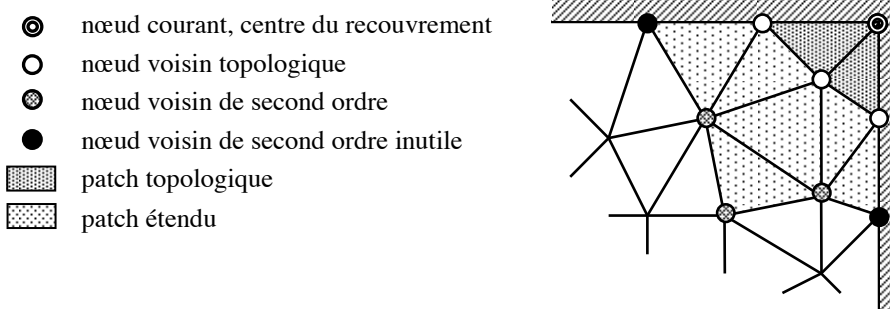


Figure 4.8 : Patch différences finies 2D sur la frontière

Si le nœud de recouvrement se trouve à l'intérieur du domaine (figure 4.7), alors on utilise le patch topologique qui offre généralement un nombre suffisant de voisins. Dans le cas de nœuds frontières où le nombre de voisins est insuffisant, le patch est étendu, et des voisins secondaires (les voisins des voisins topologiques) sont considérés. Fourment [Fourment 92] a montré que, dans certaines configurations, l'ajout de certains nœuds n'apporte rien : en 3D les nœuds voisins alignés (voir figure 4.8 pour le cas 2D) ou ceux qui sont coplanaires sont considérés comme superflus et apportent une information redondante. En pratique cela se traduit par une matrice du système non inversible.

L'algorithme général de la construction des patchs différences finies est le suivant :

- i. on cherche tout d'abord les voisins topologiques pour le nœud de recouvrement courant ;
- ii. si le nombre de voisins est insuffisant (inférieur au nombre de voisins nécessaires fixé au préalable) on cherche les voisins topologiques des voisins retenus précédemment ;
- iii. si le nombre de voisins (topologiques + secondaires) est trop important, on effectue une sélection uniquement parmi les voisins secondaires ; le critère de choix des voisins est le suivant ([Fourment 92]) :

$$\text{Pour tout nœud voisin } l, \zeta(l) = \prod_{i=1}^3 \left(2 - \frac{\Delta x_i^1}{\Delta r_l} \right) \quad (4.43)$$

où Δx_i^1 et Δr_l sont définis dans (4.32). $\zeta^{-1}(l)$ est une mesure de la quantité d'information exploitable au voisin l pour une méthode de différences finies. Les voisins retenus sont ceux qui ont les valeurs de $\zeta(l)$ la plus faible, ce qui revient à choisir finalement les meilleurs voisins.

Cet algorithme permet de construire les patchs différences finies pour n'importe quel type de maillage. Néanmoins, dans des cas très particuliers, certaines topologies de maillage ne permettent pas d'aboutir à un patch différences finies qui assure un bon conditionnement du système. C'est le cas par exemple d'un maillage 3D avec un seul élément dans l'épaisseur. Dans ce type de maillage, tous les nœuds sont coplanaires. Fourment [Fourment 92] propose de diminuer l'ordre de la solution en se contentant d'un développement de Taylor au premier ordre, qui demande moins de voisins autour du nœud.

4.3.3 Synthèse

La technique de différences finies locales proposée par Liszka et Orkisz [Liszka 80] est très semblable à l'approche SPR : les deux approches consistent à construire une solution d'ordre supérieur à celui de la solution éléments finis en utilisant une expansion polynomiale (un développement de Taylor pour les différences finies locales) sur des patchs centrés sur un nœud. Les principales différences entre les deux approches sont :

- dans le cas de la technique SPR le recouvrement est effectué sur un patch topologique (figure 4.2) alors que dans l'approche LO on considère des patchs différences finies où le voisinage est construit selon un critère de choix de voisins (équation (4.43)). Le patch SPR est un cas particulier du patch différences finis
- dans le cas de nœuds frontières, l'approche SPR suggère l'utilisation de patchs intérieurs (figure 4.4) alors que dans l'approche LO on utilise un patch étendu contenant le patch topologique et des voisins secondaires sélectionnés (figure 4.8).

- dans la technique LO des fonctions de pondération (en $[(\Delta r_i)^3]^{-1}$) sont utilisées pour donner plus de poids aux voisins les plus proches du nœud de recouvrement. Dans le cas de la technique SPR tous les voisins ont le même poids.

4.4 Technique MPR (Minimal Patch Recovery)

4.4.1 Principe de la technique

Sauf dans le cas de l'approche du polynôme conjoint [Blacker 94], les techniques de recouvrement SPR et LO étudiées précédemment permettent de calculer des valeurs nodales $\tilde{\sigma}^k$ des contraintes recouvrées, qui seront par la suite interpolées au centre des éléments (pour des éléments linéaires avec un seul point d'intégration) moyennant les fonctions d'interpolation. Cette interpolation permet d'assurer la continuité de la contrainte recouvrée $\tilde{\sigma}_h$ sur tout le domaine. Néanmoins, l'interpolation des valeurs nodales diffuse l'information des points superconvergents et par conséquent peut altérer l'efficacité de la technique de recouvrement. Une première amélioration de l'approche SPR que l'on propose dans le cadre de ce travail est d'utiliser des patches minimaux centrés sur un élément du maillage (figure 4.9). Ce type de patch est qualifié de minimal car il utilise l'information minimale (nombre de points d'intégration minimal) pour calculer l'expansion polynomiale directement au point d'intégration considéré (sans interpolation). La solution recouvrée $\tilde{\sigma}_h$ est ainsi directement calculée aux points de Gauss des éléments du maillage. Par conséquent, on renonce à calculer une solution continue sur tout le domaine, mais on se contente de la continuité seulement sur le patch.

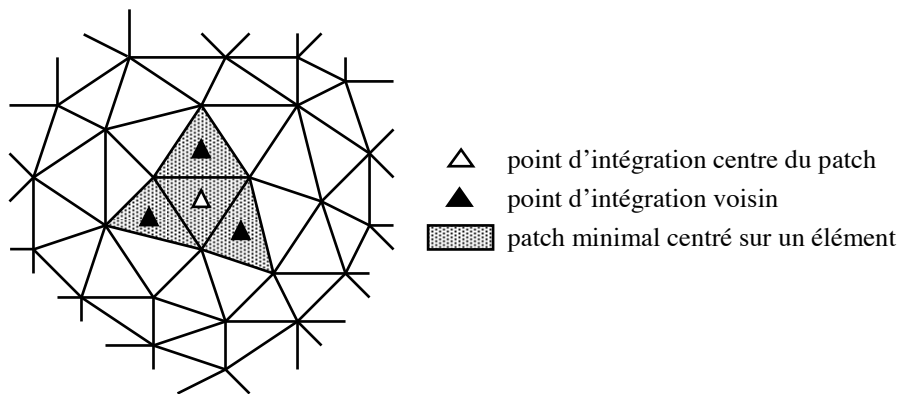


Figure 4.9 : Patch 2D centré en sur un élément

Pour construire le patch minimal on considère que deux éléments sont voisins s'ils ont une face commune (une arête commune en 2D, figure 4.9). Dans le cas d'un maillage formé de tétraèdres linéaires (cadre de ce travail), un point d'intégration (un élément) aura toujours 4 points d'intégrations voisins (4 éléments voisins). Tant que le maillage n'est pas dégénéré les 4 voisins sont naturellement bien répartis dans les différentes directions de l'espace assurant ainsi un recouvrement de qualité.

Soit Ω^{int} un patch minimal centré en un point d'intégration int . La fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$\Pi(a^{int}) = \sum_{i=1}^5 \left(\sigma_h(i) - P(x_i, y_i, z_i) \cdot a^{int} \right)^2 \quad (4.44)$$

où a^{int} est le vecteur des coefficients de l'expansion polynomiale dans Ω^{int} .

On résout le problème :

$$\text{pour tout } i = 1, \dots, 4, \quad \frac{\partial \Pi(a^{int})}{\partial a_i^{int}} = 0 \quad (4.45)$$

La contrainte est ensuite calculée directement sur le point d'intégration :

$$\tilde{\sigma}_h(int) = \tilde{\sigma}_h^{int} = P(x_{int}, y_{int}, z_{int}) \cdot a^{int} \quad (4.46)$$

L'estimation d'erreur donnée par (2.55) nécessite le calcul des contraintes aux points d'intégration :

$$\eta^e = \left(\sum_{int \in \Omega^e} \omega^{int} \left(\tilde{\sigma}_h(int) - \sigma_h(int) \right) : C^{-1} \left(\tilde{\sigma}_h(int) - \sigma_h(int) \right) \right)^{1/2} \quad (4.47)$$

ω^{int} et J^{int} sont respectivement le poids et le Jacobien associés au point d'intégration int .

La contrainte (4.46) recouverte par la technique MPR est ainsi directement exploitable dans le calcul d'erreur et l'interpolation (4.18) n'est plus nécessaire.

4.4.2 Recouvrement MPR sur la frontière du domaine

Dans le cas d'un élément frontière (i.e. un élément avec une face qui appartient à la frontière du domaine), le patch minimal ne suffit pas pour déterminer les coefficients de l'expansion polynomiale. Dans ce cas, les points d'intégration manquants sont remplacés par les conditions aux limites. L'approche est similaire à celle de la technique SPREB de Wiberg et al. [Wiberg 94] mais généralisée à différents types de frontières.

- conditions de symétrie : on ajoute un point d'intégration symétrique de celui de l'élément dont la face se trouve sur la frontière de symétrie (figure 4.10-(a)).
- condition de surface libre ou chargée (figure 4.10-(b)) : lorsque la face se trouve sur une frontière libre ou soumise à un chargement imposé, une condition de contrainte normale nulle ou imposée est écrite au centre de la face de l'élément :

$$\text{frontière libre : } \sigma \cdot n = 0 \quad (4.48)$$

$$\text{frontière chargée : } \sigma \cdot n = \sigma^{imp} \cdot n \quad (4.49)$$

avec n la normale de la face et σ^{imp} est la contrainte imposée.

La contribution de ces conditions de chargement est ajoutée à la fonctionnelle à minimiser avec le terme additionnel suivant :

$$\Pi^{imp} = \sum_{i=1}^{Nfl} \left(\sigma^{imp}(i) \cdot n - \tilde{\sigma}_h(i) \cdot n \right)^2 \quad (4.50)$$

où N_{fl} est le nombre de faces frontières libres et chargées et i est le point d'intégration au centre de la face.

- Condition de contact (figure 4.10-(c)): dans le cas d'une surface de contact (pièce/outil) la condition de contact est écrite dans les deux directions tangentiels de la face et la condition de contrainte imposée (effort de forgeage par exemple) est écrite dans la direction normale :

$$(\sigma \cdot n - \sigma_n \cdot n) \cdot t_i = \tau \cdot t_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.51)$$

$$\sigma_n \cdot n = \sigma^{cont} \cdot n \quad (4.52)$$

où t_1 et t_2 sont les deux directions tangentiels de la face, n est la normale de la face, τ est la cisssion de frottement (équation (1.12)) et σ^{cont} est la contrainte normale de contact.

La contribution des termes de contact à la fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$\Pi^{cont} = \sum_{i=1}^{N_{fc}} \left(\sigma^{cont}(i) \cdot n^i - (\tilde{\sigma}_h(i) \cdot n^i) \cdot n^i \right)^2 + \sum_{i=1}^{N_{fc}} \left(\tau(i) \cdot t^i - (\tilde{\sigma}_h(i) \cdot n^i - \tilde{\sigma}_{n,h}(i) \cdot n^i) \cdot t^i \right)^2 \quad (4.53)$$

avec N_{fc} le nombre de faces en contact et $t^i = (t_1^i, t_2^i)^t$, directions tangentiels de la face i .

$\sigma^{cont}(i)$ et $\tau(i)$ sont calculées au point d'intégration centre de la face i .

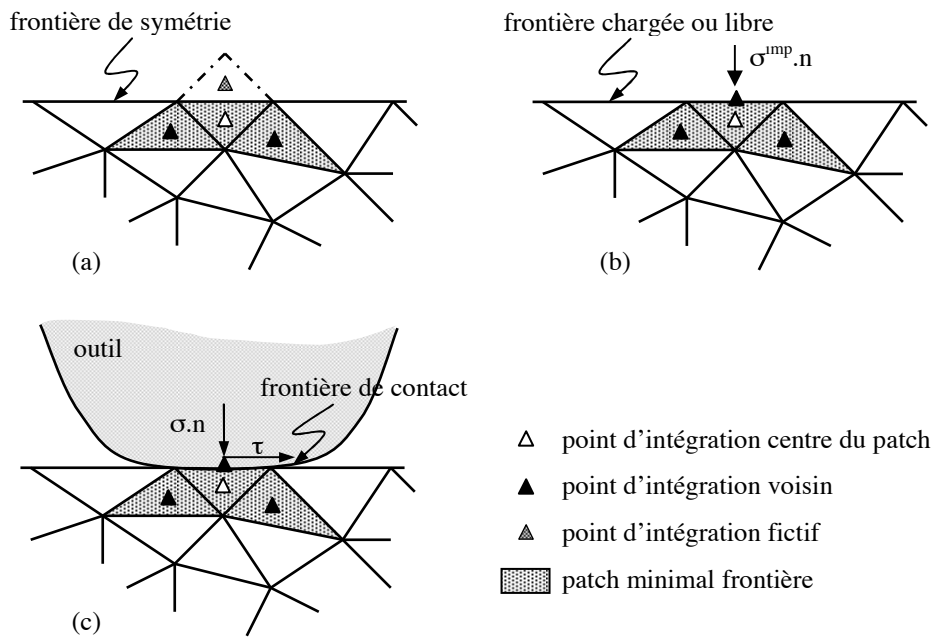


Figure 4.10 : Différentes configurations du patch minimal sur la frontière

Dans le cas d'une contrainte imposée ou d'une face en contact, seule la composante normale du tenseur des contraintes est connue sur la frontière. Par conséquent, et malgré la prise en compte de ces conditions aux limites, le système de minimisation reste indéterminé car il manque les informations pour les deux composantes tangentiels. Pour éviter ceci, on stabilise le système en ajoutant des conditions supplémentaires et ce par l'ajout des voisins secondaires au patch minimal (figure 4.11).

La fonctionnelle totale à minimiser s'écrit :

$$\Pi'(a^{int}) = \sum_{i=1}^{N_{int}} (\sigma_h(i) - \tilde{\sigma}_h(i))^2 + \omega^{sec} \sum_{j=1}^{N_s} (\sigma_h(j) - \tilde{\sigma}_h(j))^2 + \Pi^{cont} + \Pi^{imp} \quad (4.54)$$

où $\omega^{sec} \leq 1$ un facteur de pondération qui sert à limiter l'influence des conditions supplémentaires de stabilisation relatives aux voisins secondaires. N_{int} est le nombre total de points d'intégrations voisins réels et symétriques et N_s est le nombre de voisins secondaires. Les résultats numériques (chapitre 5) ont montré que le poids $\omega^{sec} = 0,1$ est un choix optimal qui offre une solution recouverte plus précise que dans le cas de $\omega^{sec} = 1$.

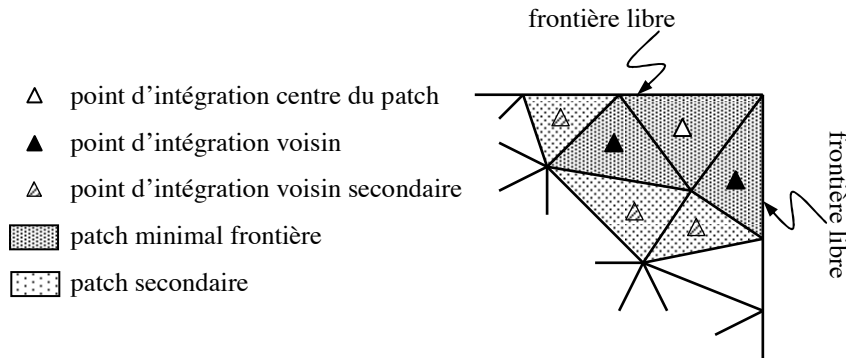


Figure 4.11 : Extension du patch minimal

4.4.3 Synthèse

La technique MPR est une variante de la technique SPR. Les modifications portent sur les deux principaux inconvénients de la technique SPR :

- la technique SPR n'est pas aussi efficace sur les frontières des domaines qu'en volume. Les résultats numériques (chapitre 5) montrent que dans certains cas la solution éléments finis est meilleure que la solution recouverte sur la frontière. Dans le cas de la technique MPR la prise en compte des conditions aux limites sur les faces du patch frontière améliore considérablement la solution. Avec la technique SPREB [Wiberg 94] les auteurs imposent les conditions aux limites d'une manière similaire mais en considérant un patch interne au domaine, comme il est d'usage dans l'approche SPR. Avec MPR, les conditions aux limites sont imposées sur le patch frontière considéré et dans le cas où le système de moindres carrés est indéterminé, on ajoute des voisins secondaires.
- la deuxième faiblesse de la technique SPR réside dans la perte d'une partie de son efficacité en interpolant aux points d'intégration les contraintes recouvertes aux noeuds. Avec l'approche MPR, les patches sont centrés sur les éléments et l'interpolation n'est pas nécessaire. Wiberg et Abdulwahab [Wiberg 95] ont présenté une étude comparative entre l'efficacité du recouvrement dans des patches nodaux (centrés aux noeuds) et des patches élémentaires (centrés aux éléments) différents de ceux utilisés ici. En effet, les patches élémentaires proposés sont construits par connectivité aux noeuds. Ils ont donc une extension en $3h$ (h étant la taille des éléments, figure 4.12), ce qui les rend plus étendus que les patches nodaux qui ont une extension en $2h$. Les auteurs [Wiberg 95] ont conclu que les patches nodaux assurent légèrement une meilleure précision par rapport aux patches élémentaires ainsi définis. Pour ce second point, le principe de notre approche ressemble plutôt à celui de l'approche proposée par Blacker et Belytschko [Blacker 94].

- la technique MPR permet, a priori, de moins diffuser l'information des points «superconvergents», mais elle offre des propriétés de continuité plus faibles. On peut alors envisager de faire des itérations de cette méthode pour augmenter le degré de continuité du recouvrement. Pour cela il suffit de remplacer dans la fonctionnelle à minimiser $\sigma_h(\text{int})$ par $\tilde{\sigma}_h(\text{int})$ calculée à l'itération précédente. Des études préliminaires ont montré que trois itérations de cette méthode offriraient un bon compromis continuité/diffusion.

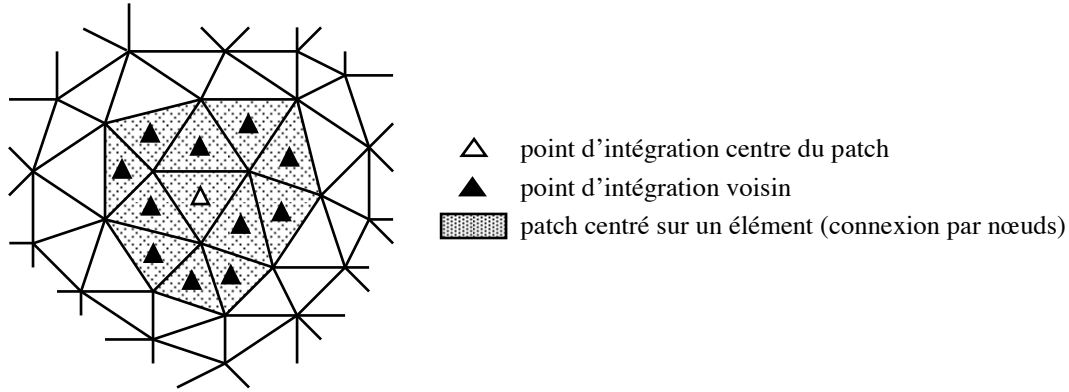


Figure 4.12 : Patch 2D centré sur un élément

4.5 Technique REP (Recovery by Equilibrium in Patches)

4.5.1 Principe de la technique

La technique REP introduite par Boroomand et Zienkiewicz [Boroomand 97-a] est inspirée, dans son principe, de la technique SPR et des améliorations qui ont été suggérées par les différents auteurs [Blacker 94], [Wiberg 93] et [Wiberg 94]. Contrairement à la technique SPR, l'approche REP ne nécessite pas la connaissance au préalable des points superconvergents dans le maillage. Par conséquent, elle peut être facilement généralisée aux différents types de maillages et de formulations. Le principe de la méthode consiste à équilibrer les contraintes recouvrées dans le patch, de la même manière que la solution éléments finis l'est.

Considérons l'équation d'équilibre classique pour un problème d'élasticité (2.17) :

$$\text{div } \sigma + f = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (4.55)$$

avec f les forces volumiques.

Le problème discret s'écrit : (équation (2.23))

$$\forall u_h^* \in U_0^{ca}, \quad F_{\Omega_h} = \int_{\Omega_h} \sigma_h : \varepsilon_h(u_h^*) d\omega - \int_{\Omega_h} f \cdot u_h^* d\omega - \int_{\partial_T \Omega_h} T^0 \cdot u_h^* ds = 0 \quad (4.56)$$

avec T^0 les efforts imposés sur la frontière $\partial_T \Omega_h$ (2.18).

Si on considère un patch Ω_k inclus dans Ω_h , alors on peut décomposer ce problème en deux parties : une partie intégrée sur le patch Ω_k et une autre intégrée sur le domaine restant $\Omega_h - \Omega_k$:

$$\forall u_h^* \in U_0^{ca}, \quad -F_{\Omega_h - \Omega_k} = \int_{\Omega_k} \sigma_h : \varepsilon_h(u_h^*) d\omega - \int_{\Omega_k} f \cdot u_h^* d\omega - \int_{\partial_T \Omega_k} T^0 \cdot u_h^* ds \quad (4.57)$$

où $F_{\Omega_h - \Omega_k}$ représentent les actions du domaine $\Omega_h - \Omega_k$ sur le patch Ω_k (figure 4.13)

Finalement, on peut écrire :

$$\forall u_h^* \in U_0^{ca}, \quad \int_{\Omega_k} \sigma_h : \varepsilon_h(u_h^*) d\omega = R_h \quad (4.58)$$

où R_h représente la somme des forces volumiques et les efforts extérieurs agissants sur le patch Ω_k calculés à partir de (4.57). En considérant le patch Ω_k comme un domaine isolé, les efforts R_h assurent l'équilibre (au sens faible) des contraintes de Ω_k .

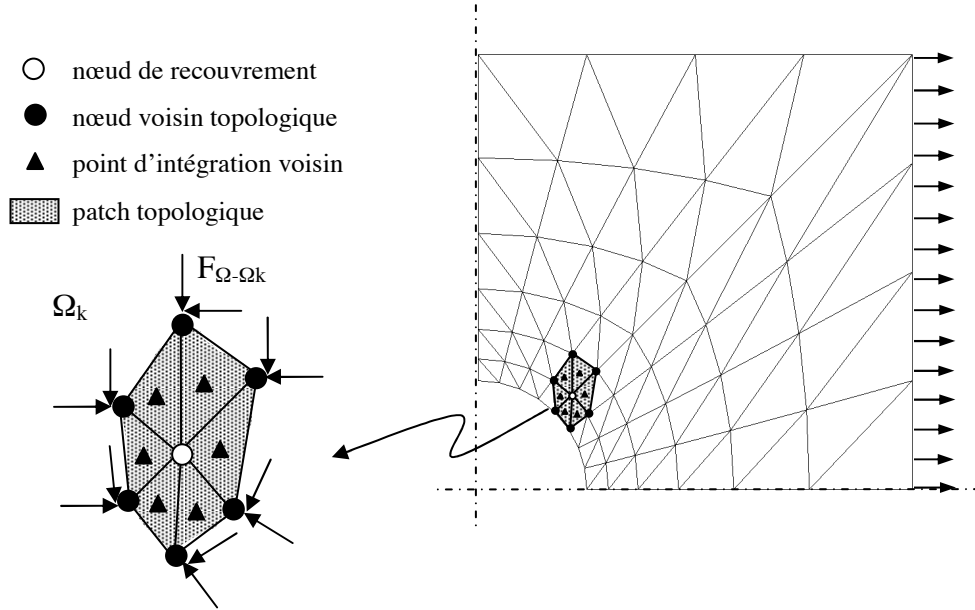


Figure 4.13 : Patch équilibré pour un recouvrement REP

De la même manière que pour les techniques de recouvrement étudiées précédemment, nous considérons l'expansion polynomiale des contraintes (2.61) dans le patch Ω_k centré en k . Afin de satisfaire l'équilibre local sur le patch Ω_k , la contrainte recouverte $\tilde{\sigma}_h^k$ doit satisfaire la condition d'équilibre (4.58). Nous écrivons alors :

$$\forall u_h^* \in U_0^{ca}, \quad \int_{\Omega_k} \tilde{\sigma}_h^k : \varepsilon_h(u_h^*) d\omega = R_h \quad (4.59)$$

d'après (4.58) et (4.59) on peut écrire :

$$\forall u_h^* \in U_0^{ca}, \quad \int_{\Omega_k} (\tilde{\sigma}_h^k - \sigma_h) : \varepsilon_h(u_h^*) d\omega = 0 \quad (4.60)$$

soit :

$$\varepsilon_h = \sum_l \sum_{\lambda} B_{l\lambda} \cdot u_l^\lambda \quad (4.61)$$

avec u_l^λ est la valeur de la composante λ ($\lambda=1, \dots, 3$) du déplacement au nœud l et $B_{l\lambda}$ vérifie :

$$B_{l\lambda}^{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial N_l}{\partial x_j} \delta_{i\lambda} + \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \delta_{j\lambda} \right] \quad (4.62)$$

où δ est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Finalement la condition (4.60) peut s'écrire :

$$\text{Pour tout } \lambda = 1, \dots, 3, \forall l \in \Omega_k, \int_{\Omega_k} (\tilde{\sigma}_h^k - \sigma_h) : B_{l\lambda} d\omega = \int_{\Omega_k} \left(\sum_{m=1}^4 P_m \cdot a_m^k - \sigma_h \right) : B_{l\lambda} d\omega = 0 \quad (4.63)$$

où P_m ($m = 1, \dots, 4$) est tel que ($P_1 = 1$, $P_2 = x$, $P_3 = y$, $P_4 = z$), et a_m^k sont des tenseurs tels que :

$$\text{Pour tout noeud } k, \tilde{\sigma}_h^{k,ij} = \sum_{m=1}^4 P_m \cdot a_m^{k,ij} \quad (4.64)$$

Pour déterminer les paramètres $a_m^{k,ij}$ on minimise la fonctionnelle suivante :

$$\Pi(a^k) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k} \left(\int_{\Omega_k} \left(\sum_{m=1}^4 P_m \cdot a_m^k - \sigma_h \right) : B_{l\lambda} d\omega \right)^2 \quad (4.65)$$

La minimisation de $\Pi(a^k)$ conduit à la résolution du système :

$$\forall n = 1, \dots, 4, \forall i = 1, \dots, 3, \forall j = 1, \dots, 3, \frac{\partial \Pi(a^k)}{\partial a_n^{k,ij}} = 0 \quad (4.66)$$

Ce qui donne :

$$\forall n = 1, \dots, 4, \forall i = 1, \dots, 3, \forall j = 1, \dots, 3,$$

$$\sum_{i',j' \in \{1,2,3\}} \sum_{m=1}^4 \left(\sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k} \int_{\Omega_k} P_n B_{l\lambda}^{ij} d\omega \int_{\Omega_k} P_m B_{l\lambda}^{i'j'} d\omega \right) \cdot a_m^{k,i'j'} = \sum_{i',j' \in \{1,2,3\}} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k} \int_{\Omega_k} \sigma_h^{i'j'} B_{l\lambda}^{i'j'} d\omega \int_{\Omega_k} P_n B_{l\lambda}^{ij} d\omega \quad (4.67)$$

Pour alléger les notations des tenseurs nous utiliserons la convention suivante:

soit T un tenseur symétrique d'ordre 3, on pose :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, 3, T^{ii} &= T^i \\ T^{12} &= T^{21} = T^4, T^{23} = T^{32} = T^5, T^{13} = T^{31} = T^6 \end{aligned} \quad (4.68)$$

Le problème (4.67) s'écrit alors sous la forme d'un système de 24×24 de la forme $A \cdot x = b$ tel que :

$$\forall n = 1, \dots, 4, \forall i = 1, \dots, 6 \quad (4.69)$$

$$\sum_{m=1}^4 \sum_{i'=1}^6 A_{nm}^{ii'} \cdot x_m^i = b_n^i \quad (4.70)$$

$$x_m^i = a_m^{k,i} \quad (4.71)$$

$$\begin{cases} A_{nm}^{ii'} = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k} \int_{\Omega_k} P_n B_{l\lambda}^i d\omega \int_{\Omega_k} P_m B_{l\lambda}^{i'} d\omega \\ b_n^i = \sum_{i'=1}^6 \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k} \int_{\Omega_k} \sigma_h^{i'} B_{l\lambda}^{i'} d\omega \int_{\Omega_k} P_n B_{l\lambda}^i d\omega \end{cases} \quad (4.72)$$

La technique permet de calculer des valeurs nodales $\tilde{\sigma}^k$ de la contrainte recouvrée. Ces valeurs sont ensuite interpolées sur tout le domaine de la même manière que dans la technique SPR.

Comme dans le cas de la technique SPRE [Wiberg 93], la condition d'équilibre dans le patch crée un couplage entre toutes les composantes du tenseur des contraintes. Les équations du système des moindres carrés sont donc couplées et la résolution se fait pour toutes les composantes du tenseur des contraintes en même temps. Par conséquent le calcul de $\tilde{\sigma}_h^k$ sur chaque patch nécessite un minimum de nœuds dans celui ci. Pour des problèmes 3D un nombre minimum de 8 nœuds est nécessaire (3 composantes de R_h par nœud, voir (4.58)) pour la résolution. Pour des patches réduits, Boroomand et Zienkiewicz [Boroomand 97-a] ont proposé d'introduire des termes supplémentaires dans la fonctionnelle $\Pi(a^k)$. Ces termes consistent en l'écriture de la condition d'équilibre (4.58) en chaque élément du patch.

La fonctionnelle totale à minimiser s'écrit alors:

$$\Pi'(a^k) = \Pi(a^k) + \sum_{e \in \Omega_k} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_e} \left(\int_{\Omega_e} \left(\sum_{m=1}^4 P_m \cdot a_m^k - \sigma_h^e \right) : B_{l\lambda} d\omega \right)^2 \quad (4.73)$$

L'introduction de ces nouveaux termes apporte des équations supplémentaires au système (4.70). Cependant, cela n'est pas toujours suffisant et la matrice A n'est pas toujours inversible.

4.5.2 Recouvrement REP sur la frontière du domaine

Pour les nœuds frontières du domaine, le patch topologique est insuffisant pour le recouvrement et les systèmes des moindres carrés sont dans la majorité des cas indéterminés. Dans ces cas, Boroomand et Zienkiewicz [Boroomand 97-a] ont suggéré deux solutions :

- la première solution est similaire au recouvrement SPR sur la frontière (cf. § 4.2.3), elle consiste à considérer le patch topologique du nœud voisin volumique le plus proche du nœud frontière pour y calculer $\tilde{\sigma}^k$. Les contraintes recouvrées sur les frontières seront, par conséquent, moins précises qu'en volume.
- la deuxième solution proposée par les auteurs consiste à introduire les équations relatives aux conditions aux limites. Dans le cas de frontière chargée, la fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$\Pi(a^k) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k} \left(\int_{\Omega_k} \left(\sum_{m=1}^4 P_m \cdot a_m^k - \sigma_h \right) : B_{l\lambda} d\omega \right)^2 + \sum_{i=1}^{NGf} \left(R \cdot \sum_{m=1}^4 P_m^i \cdot a_m^k - T^0 \right)^t \left(R \cdot \sum_{m=1}^4 P_m^i \cdot a_m^k - T^0 \right) \quad (4.74)$$

où R désigne la matrice de rotation du repère global au repère local de la frontière du patch, NGf est le nombre de points d'intégrations sur les faces frontières du patch et T^0 représente les contraintes imposées sur la frontière.

Pour des patches très réduits (cas d'un nœud qui se trouve sur l'intersection de deux ou trois frontières), la prise en compte des conditions aux limites ne permet pas d'assurer le minimum d'équations nécessaires à la résolution du problème.

4.5.3 Technique REP modifiée

La principale difficulté de la technique REP est liée au manque d'informations (i.e. manque d'équations) sur les patches des maillages arbitraires. Ceci est dû au fait que le nombre d'équations est lié au nombre de nœuds du patch alors que dans le cas de la technique SPR par exemple, le nombre d'équations est donné par le nombre de points d'intégration du patch.

Considérons à titre d'exemple le patch 2D représenté sur la figure (4.13). Pour la technique SPR on a 18 équations (6 points d'intégration \times 3 composantes du tenseur de contrainte) par contre pour REP on n'a que 12 (6 noeuds \times 2 composantes des efforts extérieurs). Donc, pour le même nombre d'inconnues et pour le même patch, on a moins d'équations pour la technique REP.

Pour surmonter cette difficulté, Boroomand et Zienkiewicz [Boroomand 97-b] ont proposé une nouvelle variante de la technique REP. Elle consiste à éliminer le couplage entre les composantes du tenseur des contraintes et à faire le recouvrement pour chaque composante à part. Ceci revient à équilibrer le patch composante par composante. Le tenseur des contraintes, écrit sous la forme vectorielle (4.68), est décomposé en une somme de vecteurs contraintes :

$$\sigma = \sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4 + \sigma^5 + \sigma^6 \quad (4.75)$$

où $\sigma^1 = (\sigma^1, 0, 0, 0, 0, 0)^t$, $\sigma^2 = (0, \sigma^2, 0, 0, 0, 0)^t$, etc.

La condition d'équilibre (4.63) est alors écrite pour chaque composante i du tenseur des contraintes :

$$\forall i = 1, \dots, 6, \forall \lambda = 1, \dots, 3, \forall l \in \Omega_k, \int_{\Omega_k} (\tilde{\sigma}_h^{k,i} - \sigma_h^i) : B_{l\lambda}^i d\omega = \int_{\Omega_k} (P_m \cdot a_m^{k,i} - \sigma_h^i) : B_{l\lambda}^i d\omega = 0 \quad (4.76)$$

La fonctionnelle à minimiser par composante s'écrit :

$$\Pi^i(a^{k,i}) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k} \left(\int_{\Omega_k} \left(\sum_{m=1}^4 P_m \cdot a_m^{k,i} - \sigma_h^i \right) : B_{l\lambda}^i d\omega \right)^2 \quad (4.77)$$

Le problème revient donc à résoudre (4.70) composante par composante.

Sur des problèmes linéaires 2D, les résultats numériques [Boroomand 97-b] montrent qu'il vaut mieux équilibrer composante par composante que d'ajouter des équations supplémentaires en écrivant l'équilibre sur chaque élément du patch (4.73). Cependant, la technique SPR est dans certains cas meilleure que cette nouvelle variante REP. En revanche, les auteurs [Boroomand 97-b] ont souligné que la technique REP est généralement plus robuste pour des maillages arbitraires et des lois de comportement non linéaires.

4.5.4 Technique REP améliorée : REP²

L'insuffisance d'information dans les patchs topologiques représente la principale difficulté de la technique REP. La nouvelle approche de la technique REP modifiée a permis de surmonter cette difficulté et d'améliorer l'efficacité mais elle ne permet pas d'assurer l'équilibre «proprement dit» de la solution recouverte dans le patch, ce qu'était l'idée initiale de la technique. Dans le cadre de ce travail, on considère l'approche initiale REP [Boroomand 97-a]. Pour assurer la quantité d'information nécessaire dans le patch, on propose d'étendre le patch topologique en ajoutant un deuxième niveau d'éléments voisins (voisins secondaires, figure 4.14).

Afin de ne pas diffuser l'information en utilisant un patch trop étendu, la contribution des voisins de second ordre est pondérée par un poids qui permet de relativiser leur influence par rapport au patch topologique de base. La fonctionnelle à minimiser s'écrit donc :

$$\Pi''(a^k) = \Pi(a^k) + \omega \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in \Omega_k^2} \left(\int_{\Omega_k^2} \left(\sum_{m=1}^4 P_m \cdot a_m^k - \sigma_h \right) : B_{l\lambda} \, d\omega \right)^2 \quad (4.78)$$

où $\Pi(a^k)$ est la fonctionnelle relative à la contribution du patch topologique (équation (4.65)), ω est un poids de pondération ($\omega \leq 1$) et Ω_k^2 est le patch qui contient les voisins secondaires. Les tests numériques ont montré (chapitre 5) que, comme dans le cas de la technique MPR, le poids $\omega = 0,1$ est un bon choix pour la précision du recouvrement.

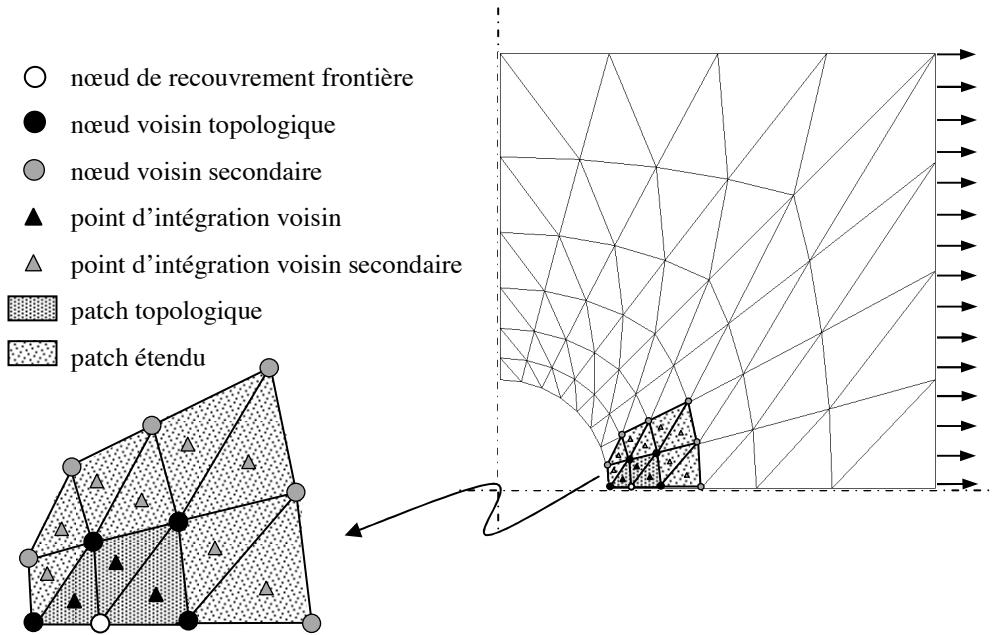


Figure 4.14 : Patch étendu pour le recouvrement REP²

Boroomand et Zienkiewicz [Boroomand 97-a] ont suggéré l'utilisation de la technique REP dans le cas de problèmes non linéaires pour lesquels les propriétés de superconvergence ne peuvent être vérifiées. Des applications aux problèmes d'élastoplasticité 2D ont été proposées par les auteurs [Boroomand 99] utilisant l'estimateur d'erreur Z²-REP pour l'estimation d'erreur a posteriori et l'adaptation de maillage. Dans le cadre de ce travail la technique REP² sera étendue pour des problèmes de viscoplasticité.

4.5.5 Synthèse

La principale motivation de l'utilisation de la technique REP est qu'elle ne nécessite pas l'existence des points de superconvergence. Par conséquent, elle peut être rigoureusement étendue aux problèmes 3D avec des lois de comportement non linéaires et des maillages arbitraires. La variante REP² proposée permet d'assurer la quantité d'information nécessaire dans le patch tout en respectant l'équilibre de la solution recouverte. En effet cette approche peut être vue comme une généralisation des différentes techniques basées sur le calcul des résidus d'équilibres dans le patch et sur les frontières [Blacker 94], [Wiberg 94] pour améliorer le recouvrement SPR.

4.6 Conclusions

Dans ce chapitre, à travers l'étude des différentes techniques de recouvrement, nous avons essayé de révéler les principales qualités et faiblesses de chaque technique ainsi que les possibilités d'améliorations suggérées par les différents auteurs. Nous avons également proposé quelques améliorations susceptibles d'augmenter leur efficacité et de les adapter à nos problèmes de mise en forme. Cependant, la grande majorité des applications de ces techniques ont concerné les problèmes linéaires 2D. Parmi les rares applications non linéaires 2D on peut citer à titre d'exemple les travaux de Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 88], Fourment [Fourment 92] et Dyduch [Dyduch 96] qui ont utilisé le recouvrement LO [Liszka 80] pour l'estimation d'erreur dans le cadre de problèmes de mise en forme des matériaux. Plus récemment, Boroomand et Zienkiewicz [Boroomand 99] ont testé l'efficacité de la technique REP [Boroomand 97-b] dans le cadre de l'adaptation des calculs en élastoplasticité 2D. Nos principales contributions dans cette partie de notre travail sont :

- une nouvelle variante de la technique SPR qu'on a appelée MPR ;
- une amélioration de la technique REP standard: REP² ;
- l'extension des différentes techniques de recouvrement pour les problèmes d'élasticité et viscoplasticité tridimensionnels avec une formulation mixte vitesse/pression et leur application à l'estimation d'erreur et l'adaptation de maillages ;

La validation numérique des techniques de recouvrement fera l'objet du chapitre 5 pour les problèmes d'élasticité et de viscoplasticité.

Chapitre 5

Estimateurs d'erreur de type Z^2 : évaluation et étude d'efficacité

Résumé

Dans ce chapitre on se propose d'étudier l'efficacité des estimateurs d'erreur de type Z^2 associés aux différentes techniques de recouvrement présentées dans le chapitre précédent. L'étude comporte deux parties principales: dans la première, les estimateurs sont évalués dans le cadre d'un problème d'élasticité. Elle concerne leur fiabilité pour l'adaptation des calculs dans les outillages, dont la déformation est supposée purement élastique. Cela nous permet aussi de comparer nos résultats avec la littérature en 2D et avec des formulations en déplacement [Zienkiewicz 92(I)], [Zienkiewicz 92(II)]. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'adaptation des calculs dans la pièce à forger. La fiabilité des estimateurs d'erreur est donc analysée dans le cadre de problèmes de viscoplasticité, avec des matériaux incompressibles et une formulation mixte vitesse/pression.

5.1 Introduction

La fiabilité des estimateurs d'erreur de type Z^2 dépend étroitement de la qualité de la solution recouvrée. Pour cela, l'étude de leur efficacité passe nécessairement par celle des techniques de recouvrement. Cela nous permet de choisir celle qui offre la meilleure estimation d'erreur pour le type de problème étudié (élasticité ou viscoplasticité). On définit ainsi deux indices d'efficacité (à ne pas confondre): le premier, déjà introduit (équation (2.26)), est relatif à l'estimateur d'erreur. C'est le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur exacte. Le deuxième, est l'indice d'efficacité de la technique de recouvrement, le rapport entre l'erreur exacte et l'erreur de la solution recouvrée:

$$\beta = \frac{\|\sigma - \sigma_h\|_E}{\|\sigma - \tilde{\sigma}_h\|_E} \quad (5.1)$$

La technique de recouvrement est dite fiable si son indice d'efficacité est supérieur à 1. Une valeur de β inférieure à 1 indique que la solution éléments finis est plus précise que la solution recouvrée. Dans ce cas, la technique de recouvrement n'est pas efficace et l'estimateur d'erreur qui lui est associé ne peut être considéré comme fiable.

5.2 Efficacité des estimateurs d'erreur en élasticité

5.2.1 Présentation du problème d'élasticité étudié

On considère le problème d'une plaque infinie trouée au centre et soumise à un chargement de traction unidirectionnel (figure 5.1-(a)). Pour des raisons de symétrie dans les directions Ox et Oy on ne considère pour les calculs que la portion du domaine délimitée par $(a,b,c,d,e,e',a',b',c',d')$ (figure 5.1-(b)). Sur les frontières (b,c,c',b') et (a,b,b',a') on impose des chargements calculés par la solution analytique (5.2) comme conditions aux limites. Pour satisfaire la condition de déformations planes, on utilise deux plans de symétrie sur les faces supérieures et inférieures de la plaque.

La solution analytique de ce problème est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_\infty} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_\infty} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_\infty} &= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \\ \sigma_{zz} &= \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \text{ et } \sigma_{\theta z} = \sigma_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

(r,θ) sont les coordonnées polaires d'un point du domaine, R est le rayon du trou et σ_∞ est le chargement imposé et est égal à 100 MPa.

Les paramètres d'élasticité sont : le module d'Young $E = 2.10^5$ MPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

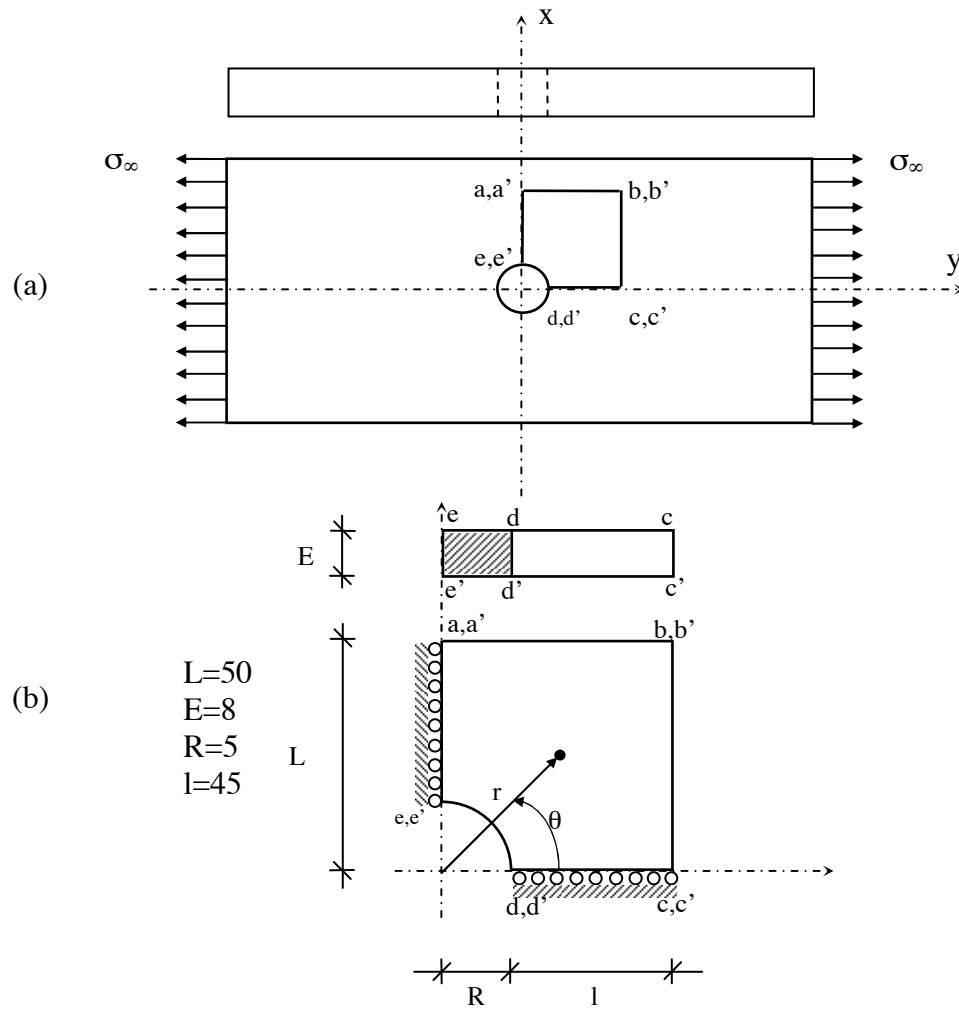


Figure 5.1 : Plaque infinie trouée au centre et soumise à une traction unidirectionnelle
(a) Problème étudié ; (b) portion du domaine considérée

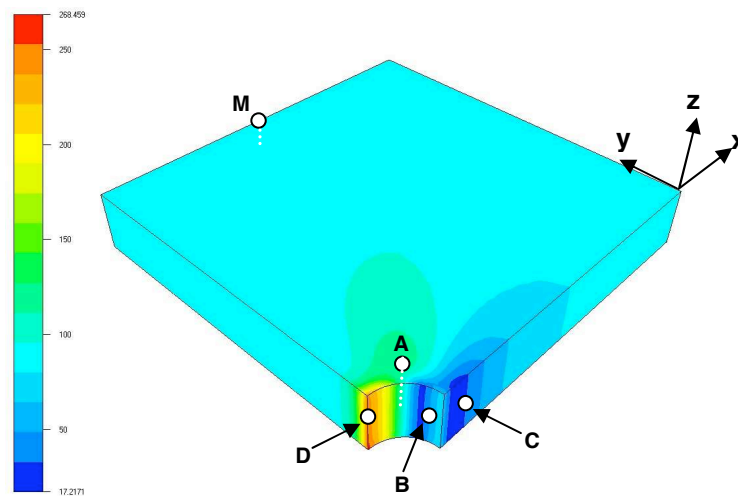


Figure 5.2 : Isovaleurs de la contrainte équivalente et localisation des points de l'étude locale

Pour les calculs éléments finis, nous utilisons des maillages tétraédriques réguliers (emboîtés) et irréguliers (figure 5.3). Dans chacun des cas, on considère une succession de trois maillages où le rapport entre la taille des éléments de deux maillages successifs est égal à 2. Ceci nous permettra d'étudier la convergence de la solution éléments finis et de la solution recouvrée.

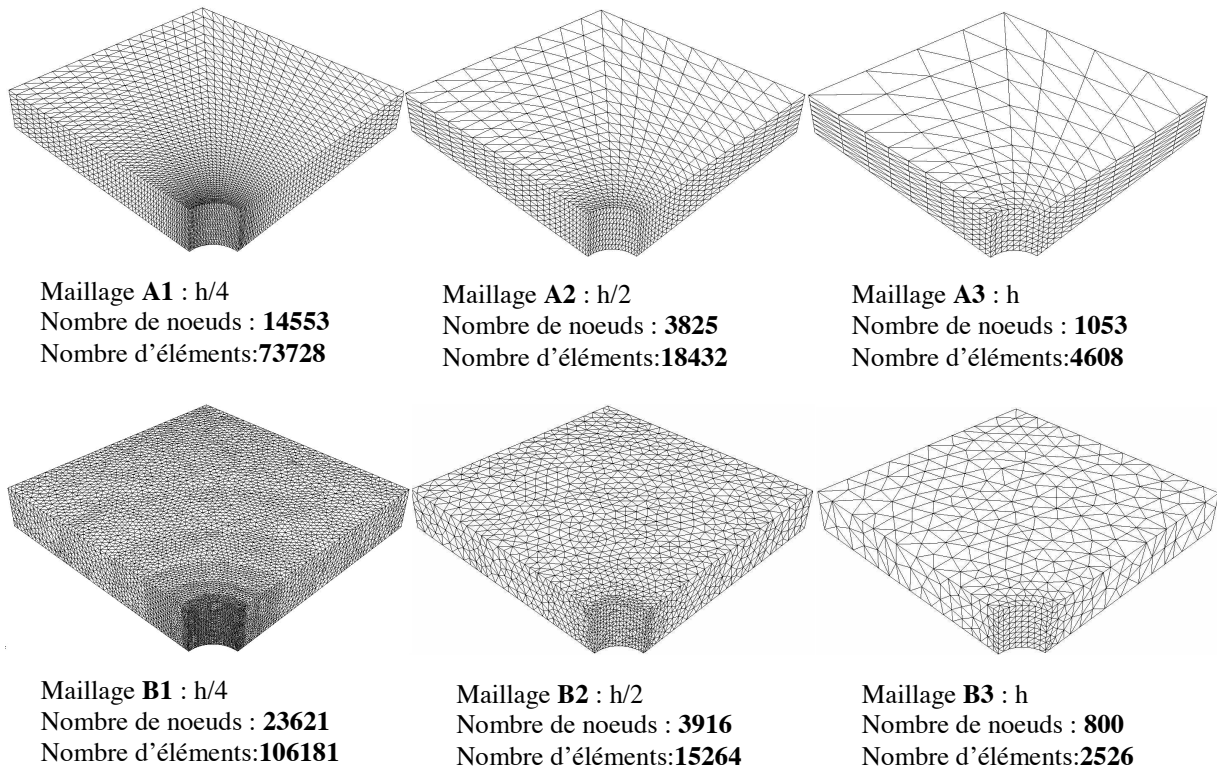


Figure 5.3 : Maillages éléments finis réguliers emboîtés (A1,A2,A3) et irréguliers (B1,B2,B3) utilisés pour les calculs éléments finis

5.2.2 Étude numérique

Dans cette étude on se propose d'aborder les points suivants :

- étude de l'influence du nombre des voisins du patch différences finis sur la précision du recouvrement LO.
- vérification des propriétés de superconvergence des solutions recouvrées.
- évaluation de l'efficacité des différentes techniques de recouvrement.
- évaluation de l'efficacité des estimateurs d'erreur associés aux techniques de recouvrement étudiées.

L'étude de la précision et de la convergence couvre l'aspect local (sur des points particuliers du domaine) et global (sur tout le domaine). Les techniques de recouvrement étudiées sont : la technique SPR standard, la technique REP^2 , la technique LO, la technique SPR-P et la technique MPR. Pour la technique LO on différencie deux cas : un recouvrement LO1, pour un développement en séries de Taylor à l'ordre 1 et LO2 pour un développement à l'ordre 2.

5.2.2.1 Tests de convergence de la méthode des éléments finis

Dans ce qui suit, on se propose de vérifier le taux de convergence de la méthode des éléments finis pour la formulation mixte vitesse/pression et avec des éléments $P1+/P1$. On considère les successions des maillages réguliers et irréguliers et on calcule l'erreur sur les contraintes en norme L^2 . Notons que pour un problème linéaire la norme L^2 et la norme en énergie sont équivalentes.

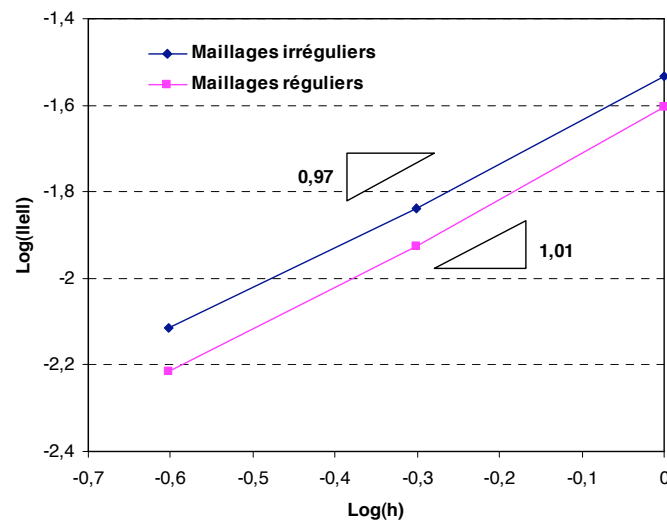


Figure 5.4 : Taux de convergence de la méthode des éléments finis

La figure 5.4 montre que les taux de convergence sont globalement proches des taux théoriques 1. On note un taux légèrement inférieur à 1 dans le cas de maillages irréguliers.

5.2.2.2 Choix du nombre de voisins pour le recouvrement LO

On considère le recouvrement du champ de déformation avec la technique de différences finies locales LO. L'objectif est de fixer le choix optimal du nombre de voisins qui permet d'avoir la meilleure précision. L'étude est menée localement au niveau du nœud A de coordonnées ($r \approx 1,5.R$, $\theta \approx 45^\circ$, $z \approx E/2$) (figure 5.2). Le principe consiste à faire varier le nombre de voisins dans le patch et à calculer simultanément l'erreur estimée et celle sur la déformation recouverte. Nous considérons les deux types de maillages. Notons que dans le cas de maillages réguliers, la topologie est constante partout et indépendante du raffinement. Le nombre de voisins topologiques est donc constant, et pour la topologie considérée il est égal à 14. Dans le cas de maillages irréguliers le nombre de voisins topologiques est variable (sur le domaine et d'un maillage à l'autre).

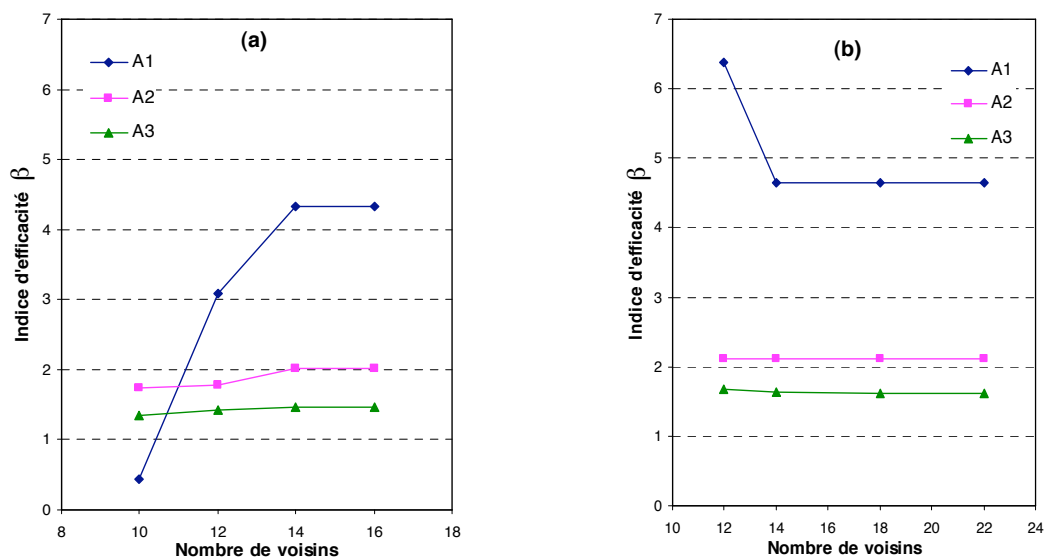


Figure 5.5 : Influence du nombre de voisins sur l'efficacité β du recouvrement LO dans le cas de maillages réguliers: (a) recouvrement LO1 - (b) recouvrement LO2

Les résultats numériques montrent que la qualité de la solution recouverte dépend de la nature et de l'étendu du patch utilisé pour le recouvrement et ceci pour les deux types de maillages considérés. Quant au nombre optimal de voisins, l'étude révèle que le patch topologique offre généralement une précision optimale pour les deux ordres de recouvrement LO. Les figures 5.5 et 5.6 montrent que les valeurs maximales de l'indice d'efficacité sont atteintes avec le patch topologique. L'ajout de voisins de second ordre au patch topologique n'améliore pas la précision tant pour LO1 que pour LO2. Dans certains cas, lorsque la solution éléments finis est de bonne qualité (maillages suffisamment fins), les patchs réduits ne permettent pas d'obtenir un taux d'efficacité β supérieur à 1 (cas du recouvrement LO1 pour le maillage régulier A1 et avec 10 voisins : $\beta = 0,43$).

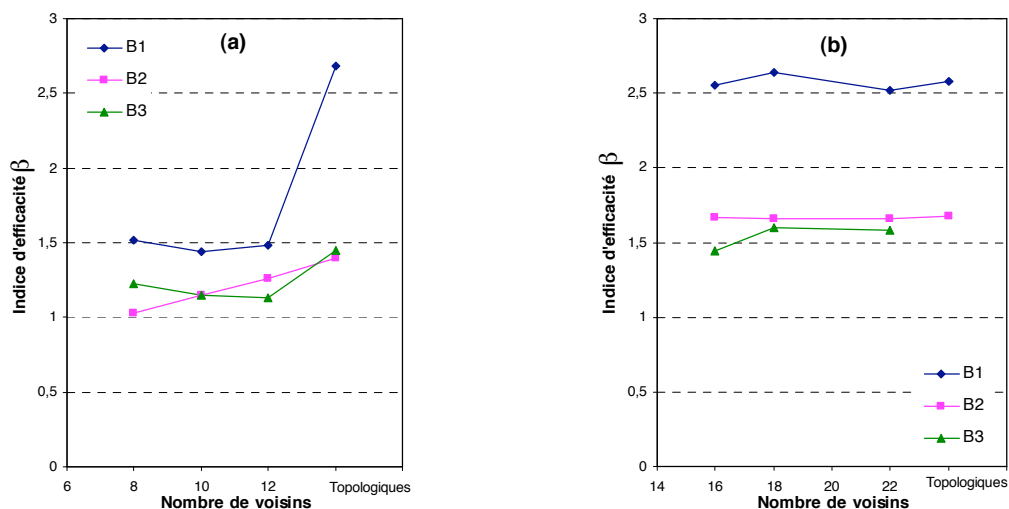


Figure 5.6 : Influence du nombre de voisins sur l'efficacité β du recouvrement LO dans le cas de maillages irréguliers: (a) recouvrement LO1 - (b) recouvrement LO2

Concernant l'ordre de l'expansion, les résultats montrent que l'ordre 2 paraît sensiblement meilleur que l'ordre 1. Cependant, dans certains cas, et notamment pour des

maillages grossiers (cas du maillage B3) le patch topologique ne suffit pas pour un recouvrement d'ordre 2 (le système des moindres carrés est indéterminé). Dans ce cas deux solutions sont possibles : la première consiste à diminuer l'ordre de l'expansion et passer à l'ordre 1 qui nécessite moins de voisins. La deuxième consiste à utiliser des voisins supplémentaires selon le critère (4.43) décrit dans le chapitre précédent. Les résultats numériques montrent que 18 voisins suffisent pour un nœud volumique. Dans ce qui suit, on opte pour un recouvrement LO2. On ne se contente pas des voisins topologiques mais on retient un nombre total de voisins topologiques et secondaires égal à 18, si le système reste indéterminé on utilise localement LO1.

5.2.2.3 Étude locale

Nous considérons les deux types de maillage (structurés et non structurés) et les erreurs sont calculées localement en des points d'intégration de volume et de frontière de différents types. Pour LO, SPR, REP² et SPR-P les contraintes calculées aux nœuds sont interpolées au point d'intégration considéré. Dans le cas de la technique MPR, les contraintes sont directement recouvrées au point d'intégration.

- a - Cas d'un élément volumique¹ (point A)

Dans ce cas, les erreurs sont calculées au point d'intégration (au centre de l'élément) de coordonnées ($r \approx 1,5.R$, $\theta \approx 45^\circ$, $z \approx E/2$).

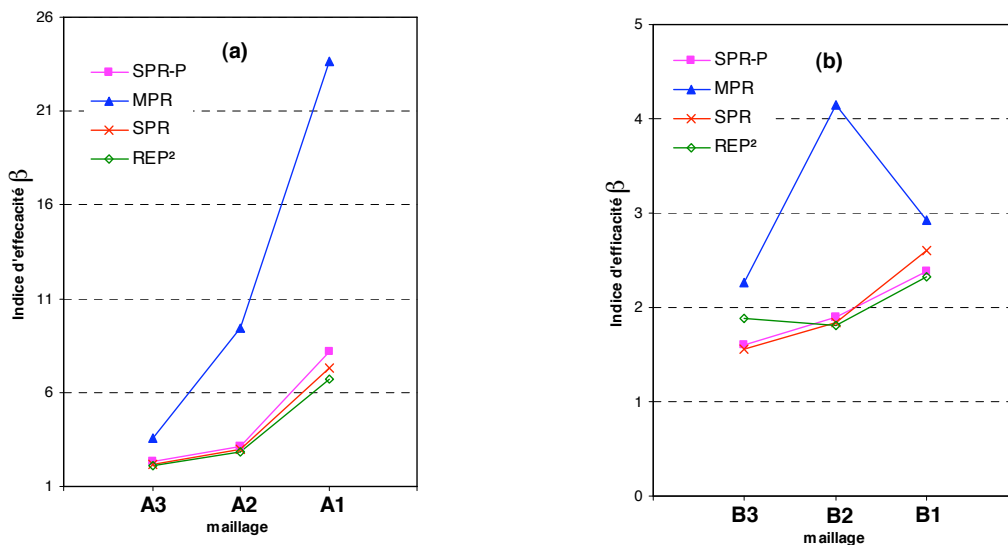


Figure 5.7 : Efficacité locale du recouvrement dans le cas d'un point d'intégration volumique
(a) maillages réguliers - (b) maillages irréguliers

Concernant l'efficacité des différentes techniques de recouvrement, les résultats montrent que les contraintes recouvrées sont toujours plus précises que la solution éléments finis. La technique MPR paraît la plus efficace des techniques étudiées. Dans toutes les configurations, son indice d'efficacité est toujours le plus élevé (figure 5.7) assurant ainsi une bonne estimation de l'erreur exacte au niveau de l'élément.

Dans le cas de maillages réguliers, les contraintes recouvrées convergent au moins deux fois plus rapidement que la contrainte éléments finis (figure 5.8). Les vitesses de convergence

¹ Dans ce qui suit, un élément est représenté par le point d'intégration situé à son centre

sont comparables avec toutes les techniques, seul le facteur de convergence change pour MPR, les autres sont parfaitement équivalentes. Ces propriétés de superconvergence ont été montrées par Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92(I)] pour des problèmes d'élasticité linéaire avec des maillages triangulaires réguliers et une formulation en déplacement. Dans le cas de maillages irréguliers, la superconvergence est moins marquée. En revanche, les solutions recouvrées convergent toujours plus rapidement que la solution éléments finis, avec un taux de convergence de $O(h^{p+0.3})$.

La pondération des contributions des voisins (recouvrement SPR-P) améliore sensiblement l'efficacité de la technique SPR. Pour un élément intérieur au volume, les techniques SPR-P, SPR et REP² offrent pratiquement le même niveau de précision.

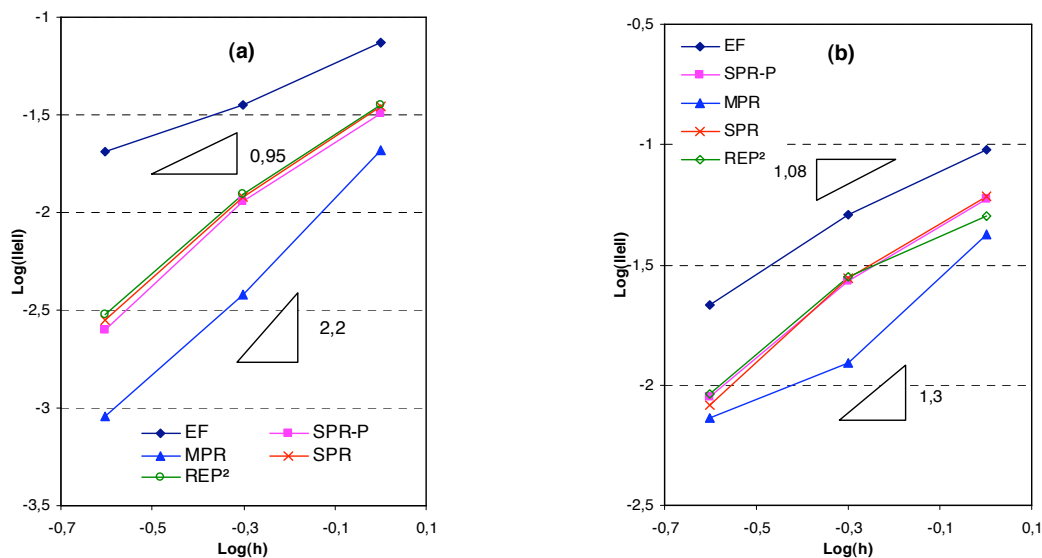


Figure 5.8 : Taux de convergence local des contraintes recouvrées
(a) maillages réguliers - (b) maillages irréguliers

- b - Cas d'un élément de la frontière

Pour étudier l'efficacité du recouvrement sur la frontière du domaine, on considère quatre configurations locales (figure 5.2):

- élément dont une face appartient à la frontière libre et de centre B ($R, 22^\circ, E/2$)
- élément dont une face appartenant à une frontière de symétrie et de centre C ($1,3.R, 0^\circ, E/2$).
- élément dont une face appartenant au milieu de la surface ($a \ a' \ b' \ b$) et de centre M.
- élément dont une face appartenant à l'intersection des deux frontières libre et de symétrie (élément à deux faces frontières) et de centre D ($R, 90^\circ, E/2$)

Seuls les graphes relatifs aux résultats du recouvrement sur la frontière libre sont présentés. Les résultats concernant les autres cas, et qui conduisent à des conclusions similaires, sont reportés dans l'annexe 1.

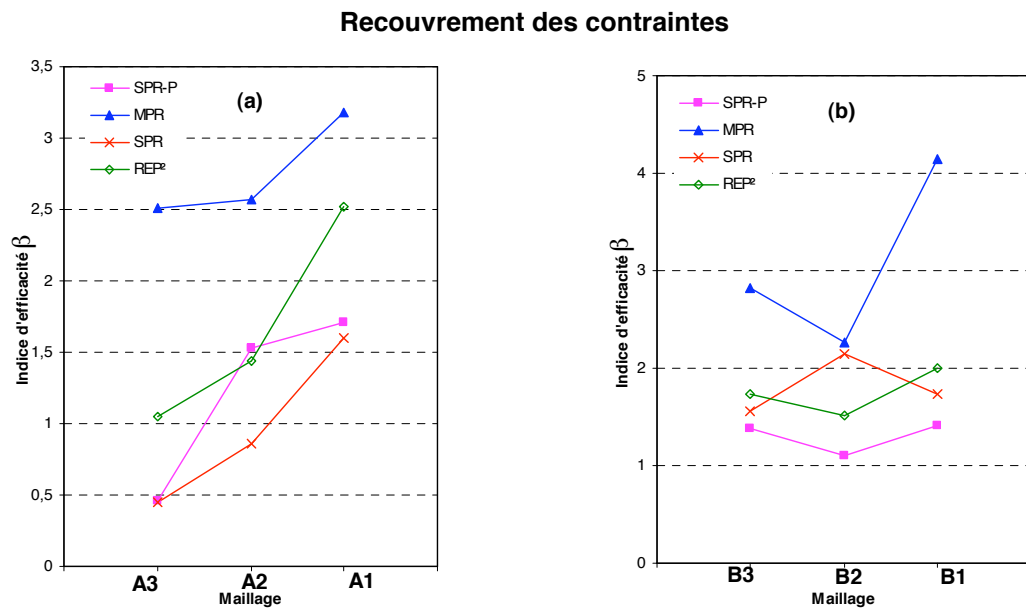


Figure 5.9 : Efficacité locale des contraintes recouvrées dans le cas d'un élément ayant une face de la frontière libre : (a) maillages réguliers – (b) maillages irréguliers

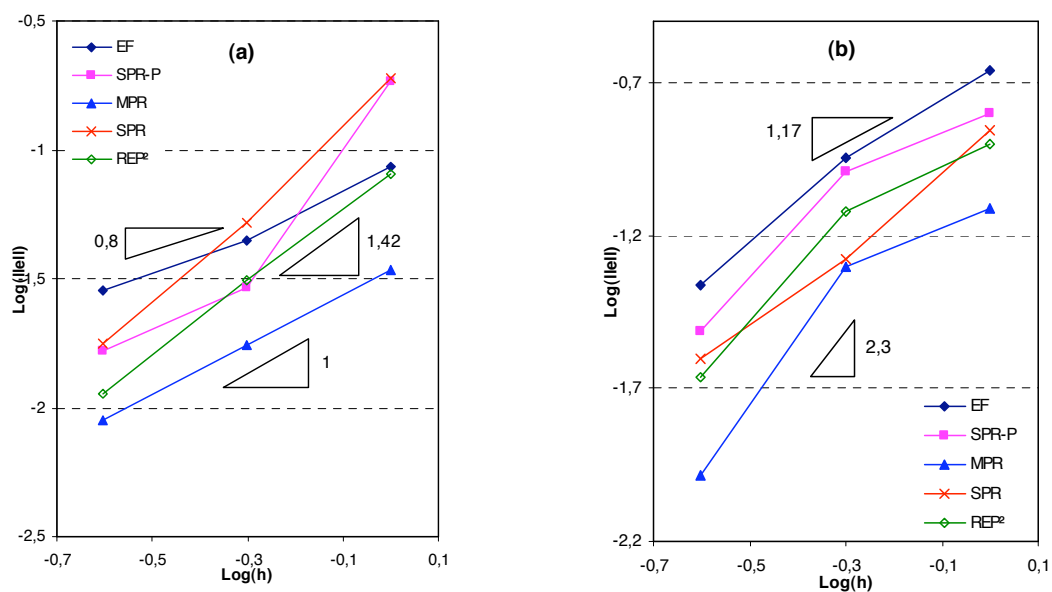


Figure 5.10 : Taux de convergence locale des contraintes recouvrées dans le cas d'un élément ayant une face de la frontière libre : (a) maillages réguliers – (b) maillages irréguliers

Dans le cas du maillage A3, les résultats montrent que les techniques SPR et SPR-P ne permettent pas d'améliorer la solution éléments finis. Celle-ci est plus précise que les solutions recouvrées. Les indices d'efficacité sont inférieurs à 1 (respectivement 0,45 et 0,46). Ceci vient du fait d'utiliser le patch volumique du nœud voisin le plus proche. Dans le cas des maillages grossiers, celui-ci est souvent loin de la frontière, et par conséquent les techniques SPR et SPR-P ne permettent pas de calculer une bonne approximation de la contrainte en surface.

Recouvrement des déformations

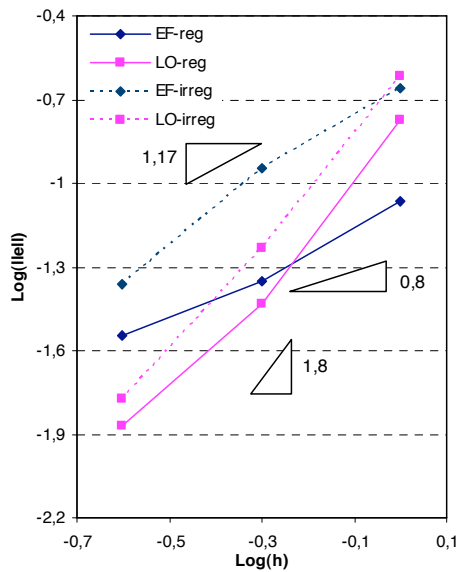


Figure 5.11 : Taux de convergence locale des déformations recouvrées dans le cas d'un élément frontière

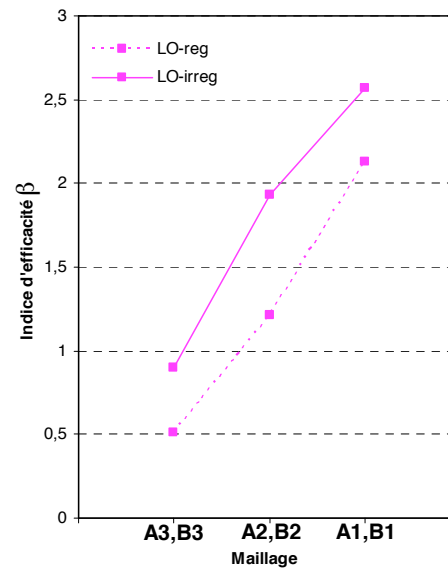


Figure 5.12 : Efficacité locale du recouvrement des déformations dans le cas d'un élément frontière

Pour le recouvrement des déformations, nous rencontrons le même manque de fiabilité sur la frontière du maillage grossier. L'utilisation d'un patch différences finies ne permet de résoudre le problème des patches de surface.

Les résultats obtenus sur des éléments de la surface sont moins regroupés que pour les éléments volumiques. Les techniques SPR et LO ont le même comportement sur la frontière. REP² a un indice d'efficacité supérieur à 1 partout, il semble donc plus robuste. Cela montre qu'en surface, il vaut mieux enrichir le patch topologique avec des voisins secondaires plutôt qu'utiliser des patches différences finies. La technique MPR a un indice d'efficacité significativement meilleur que les autres. La figure 5.9 montre qu'elle est la plus efficace des techniques (cf. annexe 1, tableaux A.13, A.14, A.15, A.16). L'introduction des conditions aux limites sur la frontière (technique MPR) et l'équilibre de la solution recouvrée dans le patch (technique REP²) permettent ainsi d'améliorer la précision du recouvrement sur la frontière pour différents types de maillages (réguliers et irréguliers).

Pour les vitesses de convergence, les résultats sont significativement différents sur les maillages réguliers et irréguliers. Sur les premiers, SPR converge plus rapidement que REP² et MPR. En revanche sur les maillages irréguliers, qui nous intéressent d'avantage pour les applications, les différentes techniques ont des vitesses de convergence comparables et proches de 2. C'est-à-dire semblables à celles des éléments de volume.

Les résultats obtenus pour les autres types de frontières (cf. annexe 1) conduisent aux mêmes conclusions.

5.2.2.4 Étude globale

Dans le cas du recouvrement REP², on se propose d'étudier, au niveau global, l'influence des voisins de second ordre sur la précision et l'efficacité du recouvrement en faisant varier la valeur de la fonction de pondération ω (1 et 0,1)

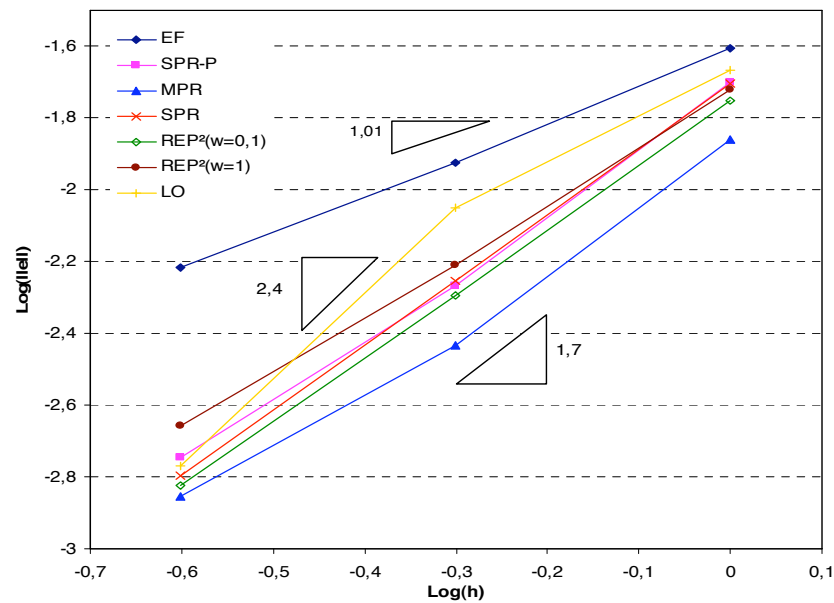


Figure 5.13: Taux de convergence globale des contraintes recouvrées dans le cas des maillages réguliers

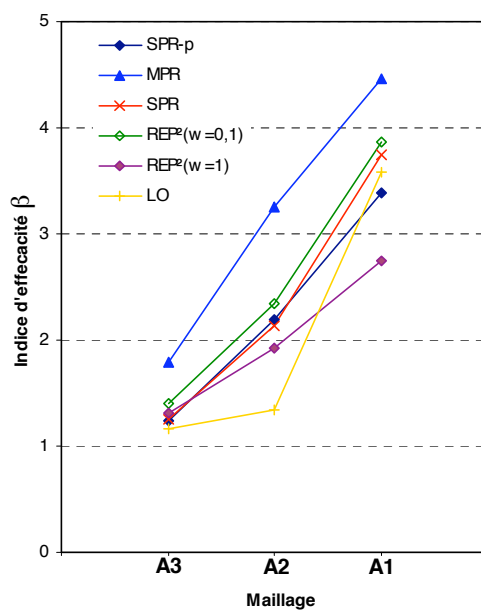


Figure 5.14 : efficacité globale du recouvrement dans le cas des maillages réguliers

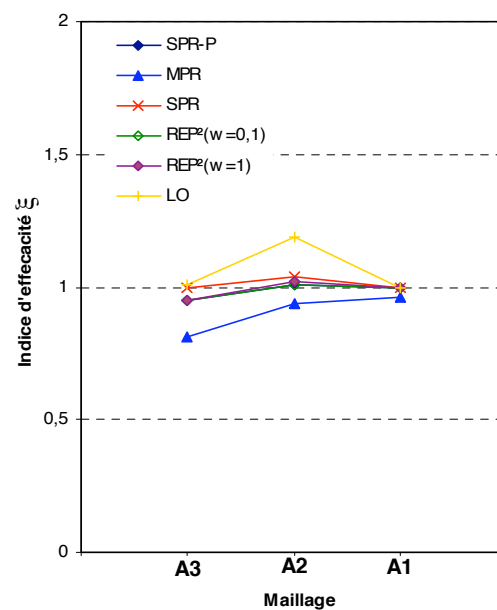


Figure 5.15 : efficacité globale des estimateurs d'erreurs dans le cas des maillages réguliers

Au niveau global, les figures 5.14 et 5.17 montrent que l'efficacité du recouvrement est toujours supérieure à 1 (alors que localement on peut avoir $\beta < 1$), mais on retrouve la même hiérarchie, à savoir que REP^2 et MPR sont plus fiables sur les maillages grossiers.

Les figures 5.15 et 5.18 montrent que le comportement global des différents estimateurs est pratiquement le même pour les deux types de maillages. Dans les cas de maillages réguliers le recouvrement MPR offre toujours la meilleure précision. Cependant pour les maillages irréguliers et lorsque la solution éléments finis est de bonne qualité (cas du maillage

le plus fin A1), ceci n'est pas toujours vrai. La précision du recouvrement des différentes techniques est comparable.

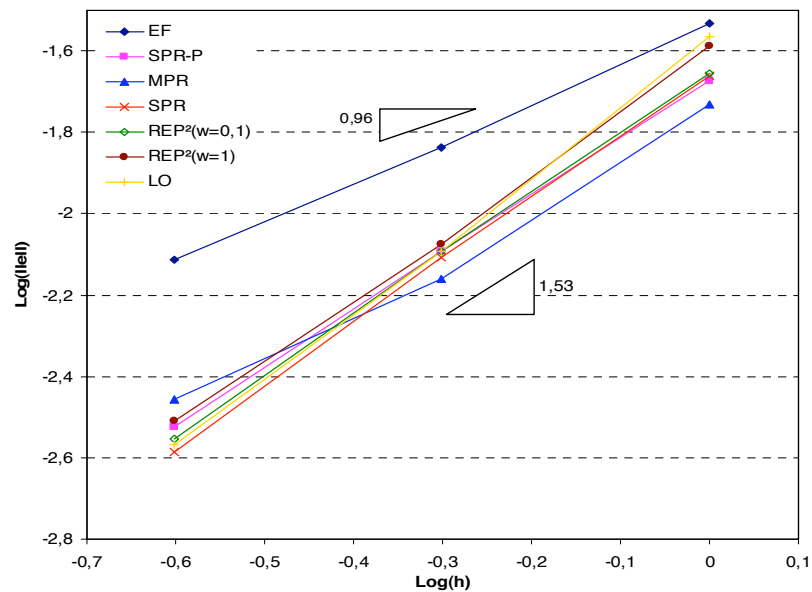


Figure 5.16 : Taux de convergence globale des contraintes recouvrées dans le cas des maillages irréguliers

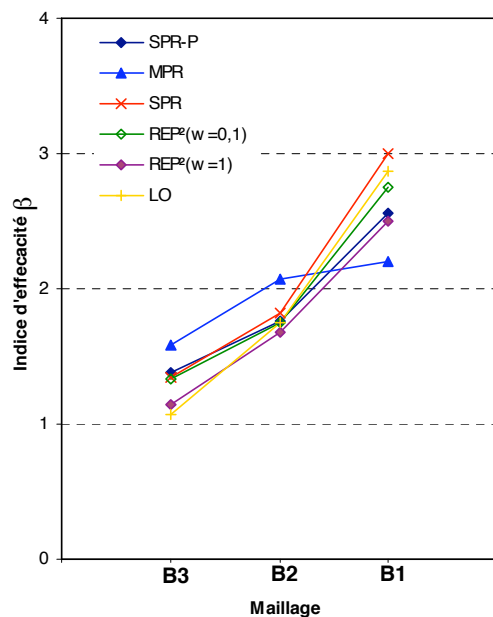


Figure 5.17 : Efficacité globale du recouvrement dans le cas des maillages irréguliers

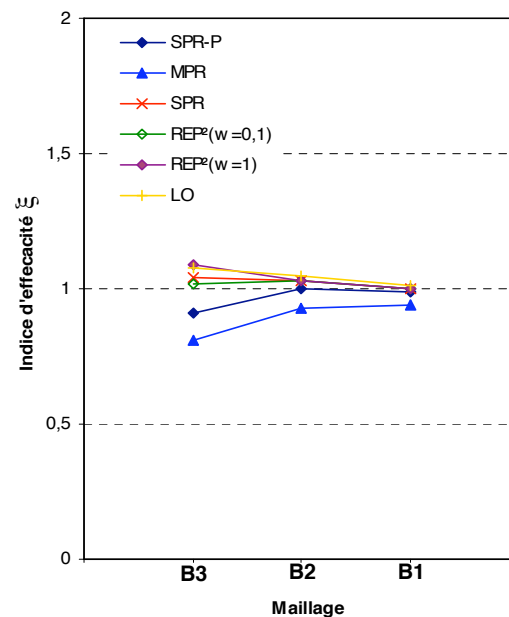


Figure 5.18 : Efficacité globale des estimateurs d'erreurs dans le cas des maillages irréguliers

Concernant le choix de la valeur du poids ω dans la technique REP^2 , les figures 5.14 et 5.18 montrent qu'en considérant la valeur $\omega = 0,1$ l'efficacité de la technique REP^2 est nettement améliorée par rapport au cas où les contributions des voisins secondaires ne sont pas pondérées ($\omega = 1$). D'autres tests numériques ont montré que des valeurs de ω inférieures à 0,1 n'améliorent pas davantage les résultats.

Finalement, nous constatons que le recouvrement des contraintes est plus efficace en terme de précision que le recouvrement des déformations par la technique LO. Bien que les propriétés de superconvergence se retrouvent dans les deux cas et avec des taux très comparables.

D'une manière générale, en se plaçant au niveau global, on note que tous les estimateurs se comportent de la même manière. Les performances observées avec MPR tant en volume qu'en surface ne se traduisent pas par des améliorations significatives au niveau global. Cet estimateur, d'un genre différent des autres, puisque ne construisant pas des champs $\tilde{\sigma}_h$ continus, offre finalement des résultats assez comparables aux autres. Comme on pouvait s'y attendre, la vitesse de convergence de $\tilde{\sigma}_h$ vers σ_h est un peu plus faible sur des maillages non structurés (1,5) que sur des maillages structurés (1,7). Elle est toujours très supérieure à 1, permettant ainsi de construire des estimateurs d'erreur efficace et asymptotiquement exacts.

5.2.2.5 Application à l'adaptation de maillage et comparaison des estimateurs

En pratique, dans une procédure d'adaptation de maillage, les estimateurs d'erreur fournissent une indication sur les zones à raffiner et celles à déraffiner. Ils permettent ainsi de piloter automatiquement l'optimisation de maillage, tout en fournissant l'information sur le niveau de précision des calculs. Dans ce qui suit, nous présentons une étude comparative des estimateurs d'erreur en contrainte pour l'adaptation de maillage de manière à évaluer leurs performances respectives pour l'indication d'erreur. Nous utilisons la stratégie d'adaptation classique (optimisation selon une précision imposée) décrite dans le chapitre 3 (cf. § 3.4.1) :

1. estimation d'erreur sur le maillage de départ ;
2. calcul des tailles optimales des éléments satisfaisant la précision imposée ;
3. construction du nouveau maillage adapté respectant la carte de taille calculée à l'étape précédente ;
4. calcul de l'erreur exacte sur le nouveau maillage ;

A partir du maillage initial B2 qui présente une erreur exacte de 1,42 %, nous essayons d'atteindre une précision de 0,30% en construisant des maillages adaptés à l'aide des estimateurs Z^2 -MPR, Z^2 -REP², Z^2 -SPR et Z^2 -SPRP.

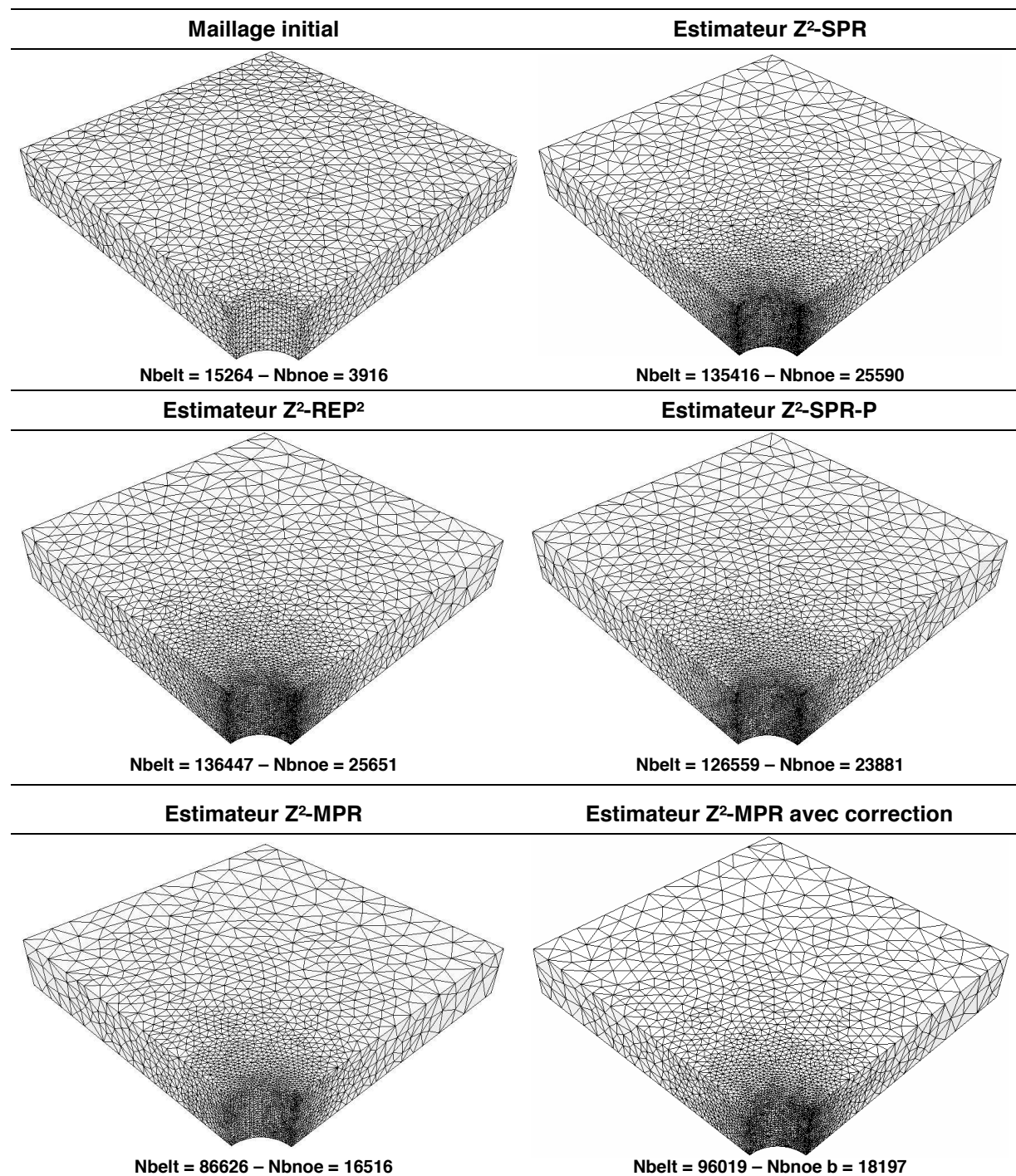


Figure 5.19 Maillages adaptés obtenus par les différents estimateurs

Estimateur	Estimation initiale	Nbéléments consigne	Nbéléments	Erreur consigne	Erreur exacte
Z^2-SPR	1.46%	172842	135416	0.30%	0.54%
Z^2-SPR-P	1.42%	162946	126559	0.30%	0.55%
Z^2-REP²	1.46%	173740	136447	0.30%	0.54%
Z^2-MPR	1.32%	116444	86626	0.30%	0.59%
Z^2-MPR avec correction	1.42%	128738	96019	0.30%	0.55%

Tableau 5.1 : Résultats sur les maillages adaptés obtenus par les quatre estimateurs

Les maillages obtenus par la procédure d'adaptation avec différents estimateurs d'erreur montrent l'efficacité de ces derniers à fournir la bonne indication d'erreur qui permet de localiser les zones à raffiner et celles à déraffiner. D'autre part, en comparant les résultats d'adaptation, nous remarquons que les estimateurs Z^2 -SPR, Z^2 -SPR-P et Z^2 -REP² tendent à générer pratiquement le même nombre d'éléments pour une précision équivalente de 0,55%. L'estimateur Z^2 -MPR sous-estime l'erreur sur le maillage initial, ce qui explique le fait que le niveau de précision atteint initialement est inférieur à celui des autres estimateurs, tout en générant moins de degrés de libertés. En revanche, en introduisant un facteur correctif de 1,1 sur l'estimation d'erreur, nous constatons que cet estimateur génère 30% moins d'éléments pour une même précision de 0,55%. Il semble que l'on retrouve ici les avantages d'une meilleure estimation dans les zones à fort gradient.

Notons qu'aucun estimateur ne parvient à atteindre la consigne de 0,30% d'erreur. Il s'avère que cette consigne est trop sévère pour un maillage de 1,42% d'erreur. Généralement, il n'est guère possible de diminuer l'erreur par un facteur supérieur à 2 en une seule opération. Dans cette situation sévère, l'estimateur d'erreur Z^2 -MPR semble donc offrir une bien meilleure indication de raffinement. Notons qu'avec le solveur utilisé une réduction du nombre d'éléments de 30% se traduit par une réduction de temps de calcul de presque 70%.

5.2.2.6 Synthèse

L'étude de l'efficacité locale et globale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur dans le cas du problème d'élasticité nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- les propriétés de superconvergence présentées dans les travaux de Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92 (I)] sont retrouvées dans le cadre du problème d'élasticité 3D étudié avec la formulation mixte vitesse/pression et des éléments tétraédriques linéaires.
- l'efficacité du recouvrement LO dépend du nombre et de la nature des voisins dans le patch. Le patch topologique semble être un choix optimal pour le recouvrement.
- le recouvrement des contraintes est sensiblement meilleur que le recouvrement des déformations.
- l'efficacité du recouvrement augmente avec le raffinement du maillage.
- les techniques SPR, SPR-P et LO sont moins efficaces sur la frontière du domaine qu'en volume. Pour des maillages grossiers, elles ne permettent pas toujours d'améliorer localement la solution éléments finis (indices d'efficacité ≤ 1).
- les patches élémentaires réduits considérés dans la technique MPR sont localement (sur les éléments particuliers choisis dans des zones de concentration de contrainte) plus efficaces

en terme de précision que les patches nodaux. Cependant l'estimateur d'erreur associé à cette technique (Z^2 -MPR) paraît un peu moins fiable et nécessite la prise en compte d'un facteur correctif de 1,1. En revanche, il semble fournir une indication d'erreur bien plus efficace que les autres techniques pour le raffinement de maillage.

- L'introduction des conditions aux limites sur la frontière (technique MPR), l'équilibre de la contrainte recouvrée dans le patch (technique REP²) et la prise en compte des voisins secondaires, améliorent considérablement l'efficacité du recouvrement sur la frontière du domaine.

5.3 Efficacité des estimateurs d'erreur en viscoplasticité

Les résultats théoriques sur les estimateurs d'erreur dans les cas non linéaires sont peu nombreux. Dans la littérature, les études menées sur leur fiabilité sont très souvent basées sur des approches empiriques. La principale difficulté réside alors dans la formulation des problèmes de validation qui doivent être représentatifs vis-à-vis de la nature des problèmes étudiés. En effet, les solutions analytiques sont rares et généralement assez éloignées des problèmes réels. La méthode généralement utilisée consiste à se servir d'une «solution de référence» calculée sur un maillage suffisamment fin pour assurer une bonne approximation de la solution exacte du problème. Les solutions obtenues sont, par la suite, évaluées en les projetant sur la solution de référence. Dans le cadre de cette étude, nous considérons deux problèmes de validation représentatifs des deux types d'écoulements rencontrés en forgeage: l'écrasement d'un lopin cubique entre tas plats (figure 5.20) et le filage d'une barre (figure 5.22). Ces deux problèmes sont souvent utilisés comme benchmarks en mise en forme. Nous nous limitons ici à l'étude d'un seul pas de temps. Le procédé de forgeage est instationnaire. L'étude de l'évolution de l'erreur en fonction de temps est abordée dans le chapitre suivant.

5.3.1 Présentation des problèmes de viscoplasticité étudiés

5.3.1.1 Problème 1 : écrasement d'un lopin cubique entre tas plats

On étudie l'écrasement d'un lopin cubique viscoplastique. Nous considérons l'hypothèse de déformations planes, et pour des raisons de symétrie seul 1/8^{ème} du domaine est utilisé dans les calculs (figure 5.20)

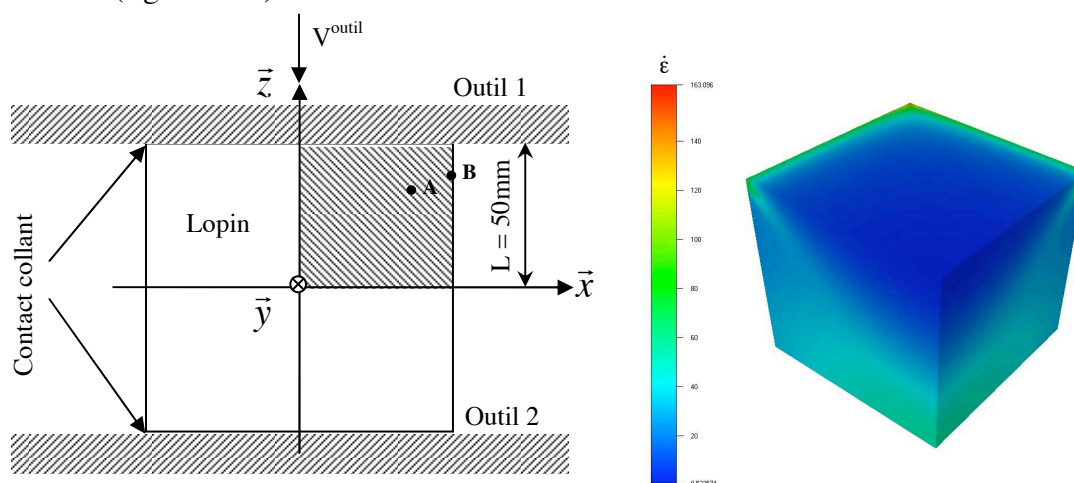


Figure 5.20 : Problème d'écrasement d'un lopin cubique entre tas plats et isovaleurs des vitesses de déformation

Le contact entre le lopin et les outils est de type collant (i.e. les surfaces supérieures et inférieures sont supposées parfaitement rugueuses). L'outil inférieur est fixe et l'outil supérieur se déplace dans la direction verticale à la vitesse $V^{\text{out}} = 10 \text{ mm/s}$. Le matériau obéit à la loi de comportement viscoplastique donnée par (1.39) avec les paramètres suivants:

$$\begin{cases} k = 2.10^3 \text{ MPa} \\ m = 0,15 \end{cases}$$

Pour les calculs éléments finis nous considérons une succession de maillages uniformes et emboîtés, où le rapport de taille des éléments entre deux maillages successifs est égal à 2 (figure 5.21). La solution de référence est calculée sur le maillage le plus fin E^{ref} . Les maillages emboîtés nous permettent de localiser le point d'intégration de référence (solution de référence) qui coïncide avec le point d'intégration considéré.

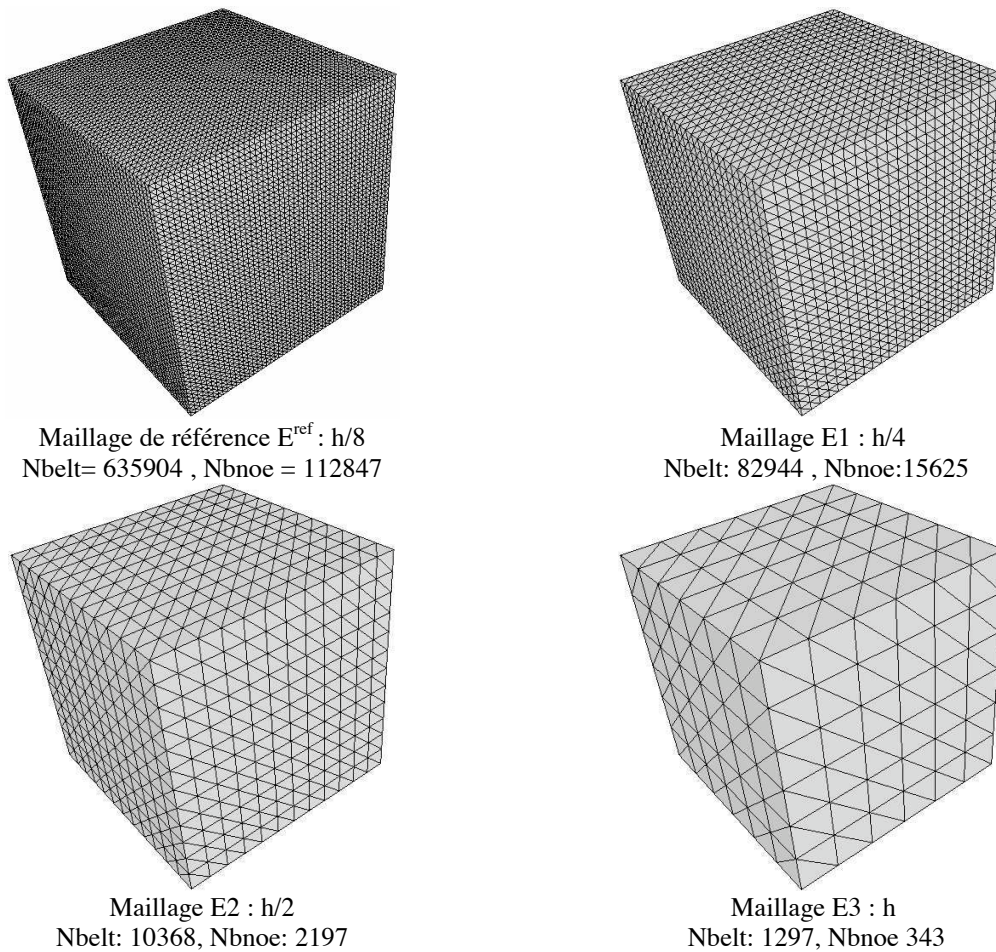


Figure 5.21 : Maillages éléments finis pour le problème d'écrasement d'un lopin cubique

5.3.1.2 Problème 2 : filage d'une barre

On étudie le filage d'une préforme viscoplastique de longueur 60mm et d'épaisseur 10mm, qui subit une réduction de section de 60mm à 20mm. Le problème étant symétrique, seule la moitié du domaine est considérée dans les calculs (figure 5.22). La vitesse du filage est de 5mm/s et la filière est supposée collante.

Le matériau considéré est viscoplastique obéissant à la même loi (1.39) avec $m = 0,139$ et la consistance k suit la loi d'écrouissage (1.41) avec les paramètres suivants:

$$\begin{cases} \beta = 2,5 \cdot 10^{-3} \\ n = 0,174 \\ \varepsilon_0 = 10^{-4} \\ k_0 = 1,625 \cdot 10^3 \text{ MPa} \end{cases}$$

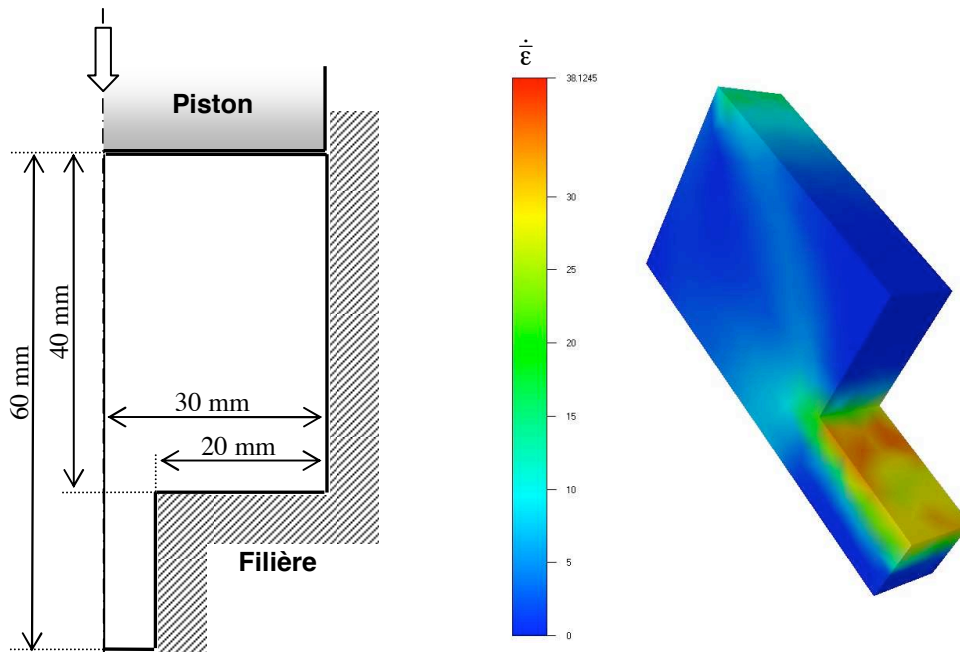
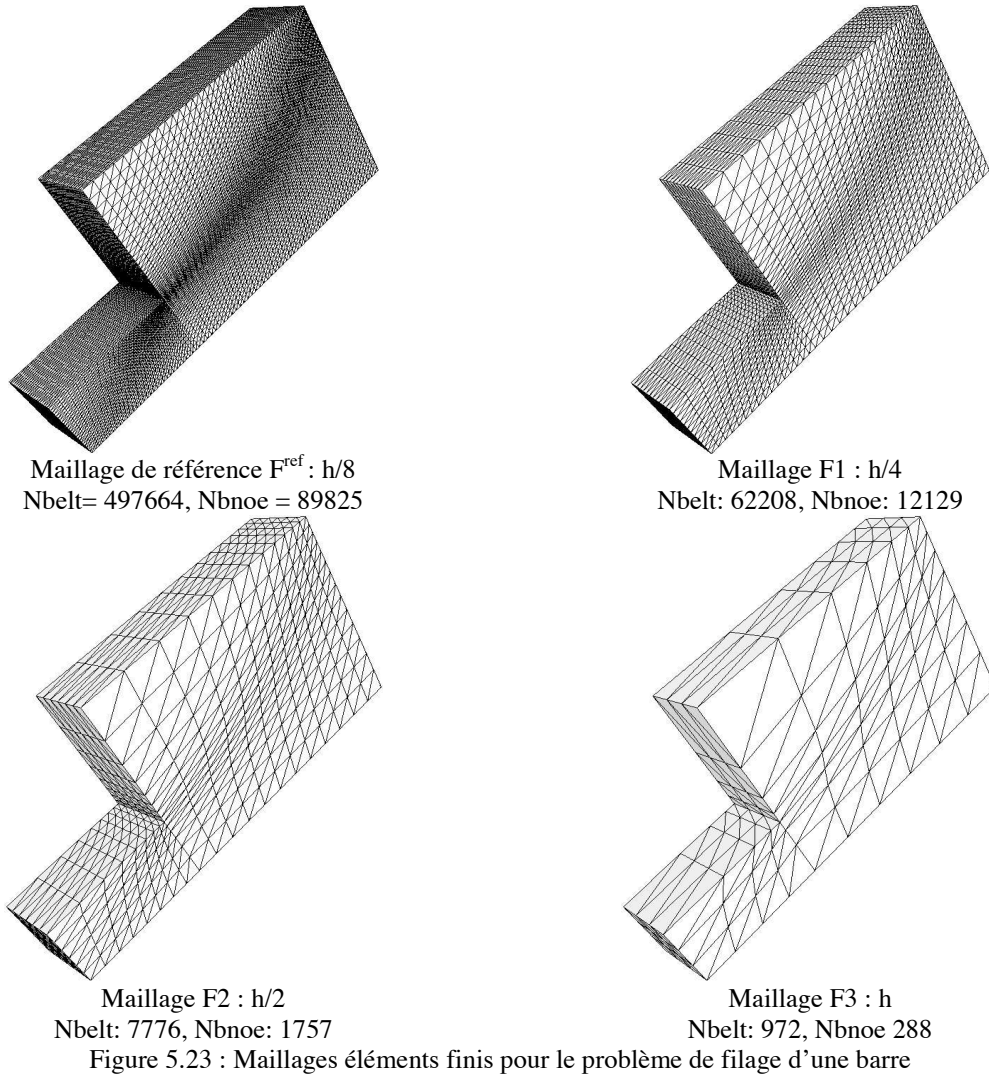


Figure 5.22 : Problème de filage d'une barre

Pour les calculs éléments finis, nous considérons la succession de maillages emboîtés représentés sur la figure 5.23. Ils sont structurés et adaptés au problème de filage. La solution de référence est calculée sur le maillage le plus fin F^{ref} .



5.3.2 Étude numérique

Comme précédemment en élasticité, on étudie l'efficacité locale (au niveau de certains points d'intégration) et globale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur qui leur sont associés. Seul le recouvrement des contraintes est considéré. Les techniques SPR, SPR-P, REP² et MPR sont comparées en terme de précision et d'efficacité. Les erreurs sont exprimées en norme en énergie dont nous rappelons l'expression :

$$\|s - s_h\|_E = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^{-1}(s) (s - s_h) : (s - s_h) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

5.3.2.1 Étude locale

L'étude locale est menée dans le cas de l'écrasement du lopin cubique entre tas plats. Deux configurations sont étudiées :

Cas d'un élément à l'intérieur du volume et situé au niveau du point A de coordonnées $(L/3, L/3, L/3)$ (figure 5.20).

Cas d'un élément avec une face frontière appartenant à une zone de cisaillement de la surface libre du lopin et située au niveau du point B ($L, L/2, L/4$) (figure 5.20).

- a - Élément à l'intérieur du domaine (point A)

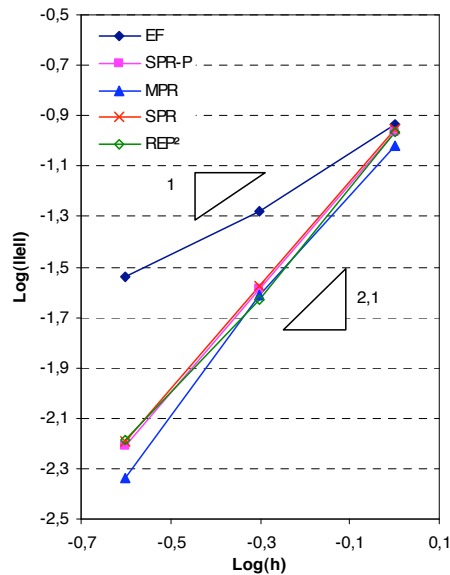


Figure 5.24 : Convergence locale et précision du recouvrement : cas d'un élément intérieur

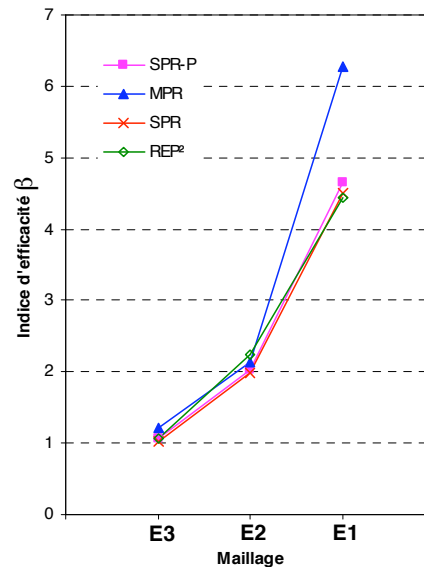


Figure 5.25 : Efficacité locale du recouvrement : cas d'un élément intérieur

L'efficacité et la précision des estimateurs sont très comparables pour les trois maillages. Dans le cas de maillage fin (E1) la technique MPR devient la plus efficace. Ceci peut être interprété par le fait que l'erreur due à la discontinuité des contraintes et à l'étendu du patch est moins importante sur les maillages fins. L'écart de précision entre le recouvrement MPR et les autres techniques est principalement dû à l'erreur d'interpolation au point d'intégration des contraintes recouvrées aux nœuds. Nous soulignons que l'efficacité du recouvrement augmente avec le raffinement du maillage. Dans le cas du maillage grossier E3, les contraintes recouvrées ont le même niveau de précision que la solution éléments finis (et MPR est un peu meilleure que les autres).

La figure 5.24 montre que les quatre techniques convergent pratiquement à la même vitesse qui est deux fois plus élevée que celle de la méthode des éléments finis. On retrouve localement les propriétés de superconvergence des contraintes recouvrées.

- b - Élément sur la frontière libre (point B)

Dans le cas du maillage grossier E3, la solution éléments finis est plus précise que les contraintes recouvrées, sauf pour MPR qui permet toujours d'améliorer la précision sur la frontière grâce à la prise en compte de la condition de surface libre. D'autre part, les résultats semblent confirmer que l'efficacité de recouvrement augmente avec le raffinement bien que le niveau de précision ait baissé par rapport à l'intérieur du domaine.

Concernant le choix du poids ω pour la contribution des voisins secondaires dans les techniques MPR et REP², les résultats montrent que la valeur 0,1 améliore l'efficacité. Cette amélioration est plus marquée pour le recouvrement MPR. Des tests supplémentaires ont

montré que, comme en élasticité, des valeurs de ω inférieures à 0,1 ne permettent pas d'améliorer d'avantage la précision.

Finalement nous soulignons que la convergence des contraintes recouvrées sur la frontière est inférieure à celle d'un élément intérieur. En revanche elle est toujours plus élevée que celle de la méthode des éléments finis.

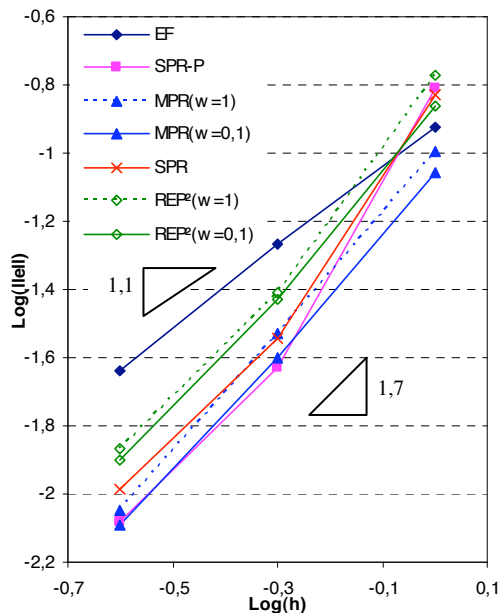


Figure 5.26 : Convergence locale du recouvrement dans le cas d'un élément de la frontière libre

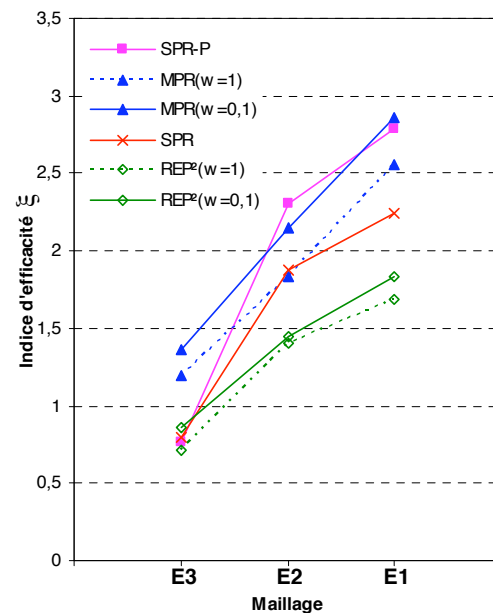


Figure 5.27 : efficacité locale du recouvrement dans le cas d'un élément de la frontière libre

5.3.2.2 Étude globale

- a - Écrasement d'un lopin cubique

La précision et la convergence des différentes techniques de recouvrement sont parfaitement similaires. Les contraintes recouvrées sont nettement plus précises que la solution éléments finis, mais elles convergent à la même vitesse que celle-ci. Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz 92(II)] ont montré que lorsque les propriétés de superconvergence n'apparaissent pas (cas de maillages non structurés et de problèmes non linéaires), la fiabilité des estimateurs de type Z^2 est toujours assurée, à condition que la technique de recouvrement permette de construire une solution plus précise que la solution éléments finis.

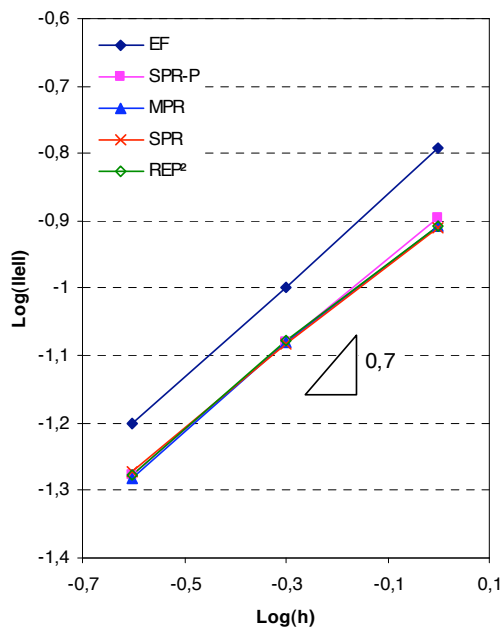


Figure 5.28 : Convergence et précision globales du recouvrement: problème d'écrasement d'un lopin cubique entre tas plats

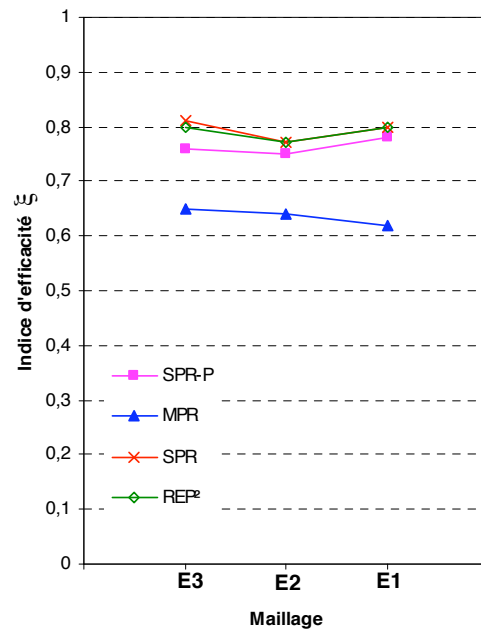


Figure 5.29 : Efficacité globale des estimateurs d'erreur: problème d'écrasement d'un lopin cubique entre tas plats

- b - Filage d'une barre

Les résultats sont similaires à ceux obtenus sur le problème d'écrasement d'un lopin cubique. La fiabilité des estimateurs est pratiquement la même, ce qui semble montrer qu'elle est indépendante du problème étudié.

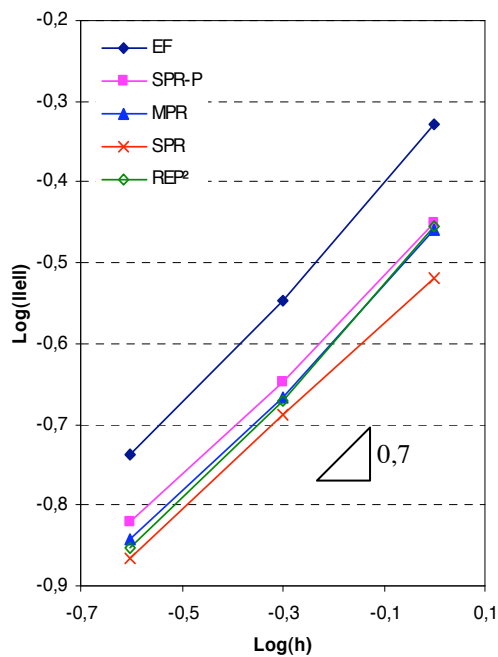


Figure 5.30 : Convergence et précision globales du recouvrement: problème de filage d'une barre

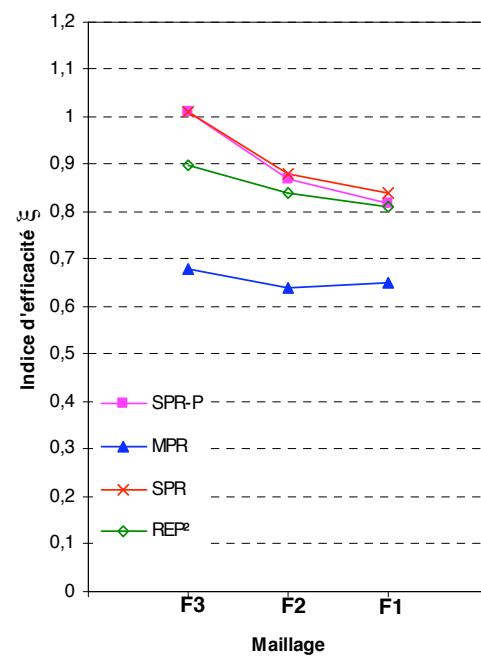


Figure 5.31 : efficacité globale des estimateurs d'erreur: problème de filage d'une barre

Concernant l'efficacité des estimateurs, les résultats montrent que les indices d'efficacité des estimateurs Z^2 -SPR, Z^2 -SPRP et Z^2 -REP² tendent vers 0,8 et pour l'estimateur Z^2 -MPR vers 0,65. En effet, en l'absence des propriétés de superconvergence, il n'est pas nécessaire que les indices d'efficacité des estimateurs tendent vers 1, ils peuvent tendre vers une valeur asymptotique par valeurs supérieures ou inférieures [Zienkiewicz 88], [Fourment 92]. Dans une procédure d'adaptation de maillage des facteurs correctifs empiriques sont alors associés aux estimateurs : 1,25 pour les estimateurs Z^2 -SPR, Z^2 -SPRP et Z^2 -REP² et 1,6 pour l'estimateur Z^2 -MPR. Notons toutefois que la convergence vers 0,65 pour Z^2 -MPR est un peu moins nette que celle vers 0,8 des autres indices d'efficacité.

5.3.2.3 Application à l'adaptation de maillage et comparaison des estimateurs

On considère le problème du filage de la barre qui présente une légère singularité à l'angle droit de la filière. Pour la procédure d'adaptation de maillage, on suppose que le taux de convergence de la méthode des éléments finis est uniforme et égal à 1. Théoriquement, et pour un problème présentant une singularité d'intensité λ , le taux de convergence est $\text{Min}(p, \lambda)$ (cf. § 2.2.1). L'objectif de cette étude est donc, d'une part, la comparaison des estimateurs d'erreur, et d'autre part la vérification de la remarque faite au chapitre 2 : pour une succession de maillages optimaux (erreur uniformément répartie), la vitesse de convergence est indépendante de la singularité.

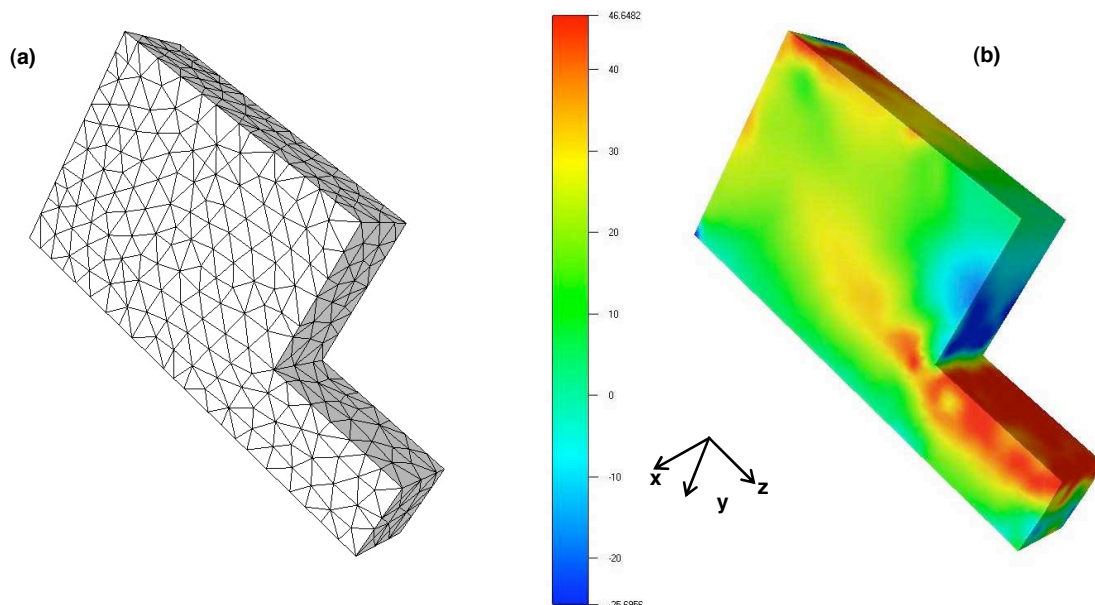


Figure 5.32 : (a) maillage initial – (b) isovaleurs de la contrainte de cisaillement σ_{yz}

Estimateur d'erreur	Erreur estimée
Z^2 -SPRP	48,01%
Z^2 -REP ²	45,12%
Z^2 MPR	42,26%
Nbelt =2127, Nbnoc = 671	

Tableau 5.2 : Propriétés du maillage initial

Sur le maillage initial, l'erreur est estimée autour de 45% (tableau 5.2). Nous nous fixons pour objectif de diminuer cette erreur en trois étapes en essayant d'atteindre pour chacune de celles-ci une précision prescrite. Les maillages sont adaptés à l'aide des trois estimateurs Z^2 -REP², Z^2 -SPRP et Z^2 -MPR. On commence par une consigne de 18% puis 9% et finalement 4,5%. Nous utilisons la procédure d'adaptation décrite au paragraphe 5.2.2.5 en tenant compte des facteurs correctifs proposés pour les estimations d'erreur et en considérant une vitesse de convergence théorique ($p = 1$). Les propriétés du maillage initial sont regroupées dans le tableau 5.2 (les estimations indiquées sont «corrigées»).

Estimateur	Itération 1 : 18%		Itération 2 : 9%		Itération 3 : 4,5%	
	Nbelt /Nbnoe	Erreur estimée	Nbelt /Nbnoe	Erreur estimée	Nbelt /Nbnoe	Erreur estimée
Z^2-REP²	3787/960	23,02%	17120/3744	10,67%	91437/17998	4,76%
Z^2-SPRP	3682/960	25,47%	16540/3328	10,20%	65727/13304	5,37%
Z^2-MPR	3713/939	17,97%	10844	8,60%	40176/8555	3,88%

Tableau 5.3 : résultats d'adaptation de maillage utilisant les estimateurs d'erreur Z^2 -REP², Z^2 -SPRP et Z^2 -MPR

Le tableau 5.3 donne les valeurs de l'erreur estimée par les 3 estimateurs en fonction de celle demandée en consigne. Du point de vue de la fiabilité, les estimateurs Z^2 -REP² et Z^2 -SPRP donnent des résultats satisfaisants : respect de l'erreur imposée en consigne et d'adaptation de maillage (figure 5.33). L'estimateur Z^2 -REP² génère plus d'éléments à la troisième itération et l'erreur estimée est la plus proche de l'erreur consigne. Dans le cas de l'estimateur Z^2 -MPR, celui-ci semble sous-estimer l'erreur malgré le facteur correctif pris en compte. A la première itération et avec la correction initiale de l'erreur il génère pratiquement le même nombre d'éléments que Z^2 -SPRP et Z^2 -REP², cependant l'erreur estimée est très différente (17,97% par rapport à 25,47% et 23,02%).

Estimateur	Erreur estimée
Z^2 -MPR	3,88%
Z^2 -REP ²	6,03%
Z^2 -SPRP	6,32%

Tableau 5.4 : Comparaison des estimateurs sur le maillage construit par la procédure de raffinement Z^2 -MPR à la 3^{ème} itération

Afin d'évaluer la fiabilité des estimateurs ici où nous ne pouvons connaître la solution exacte, une approche consiste à comparer les estimations entre elles sur un même maillage. Pour cela on considère le maillage adapté final obtenu par l'estimateur Z^2 -MPR. Nous y calculons l'estimation Z^2 -REP² et Z^2 -SPRP. Les résultats sont réunis dans le tableau 5.4. Ils confirment la tendance de Z^2 -MPR à sous-estimer l'erreur malgré la prise en compte du facteur correctif. Cette correction a été obtenue sur des maillages réguliers et elle semble non valable pour les maillages non structurés ce qui est de mauvais augure pour la robustesse de la technique MPR.

Il semble donc que l'erreur de discrétisation sur de maillage soit proche de 6%. Si maintenant nous rapportons cela au nombre de nœuds du maillage, on constate que la procédure de raffinement Z^2 -MPR est aussi efficace que les autres (précision équivalente pour un nombre de nœuds donné) mais qu'elle n'est pas supérieur comme cela semblait être le cas en élasticité.

Les estimations Z^2 -SPRP et Z^2 -REP² paraissent en revanche très cohérentes par rapport aux résultats d'adaptation précédents (tableau 5.3). Du point de vue de la réponse à l'erreur imposée en consigne, l'estimateur Z^2 -REP² semble être le plus fiable.

Concernant la convergence de la procédure d'adaptation et pour les estimateurs Z^2 -REP² et Z^2 -SPRP, les résultats montrent que celle-ci converge moins bien à la première itération qu'aux suivantes, sans doute à cause de la singularité du problème. Les maillages obtenus présentent des erreurs autour de 23% et 25%, alors que la consigne est de 18%. A la troisième itération, la convergence est devenue presque parfaite, car les maillages sont presque optimaux. Ceci confirme l'hypothèse que la fiabilité des estimateurs d'erreur n'est pas très affectée par la présence d'une singularité, et que peu d'itérations permettent de construire un maillage satisfaisant avec une précision requise.

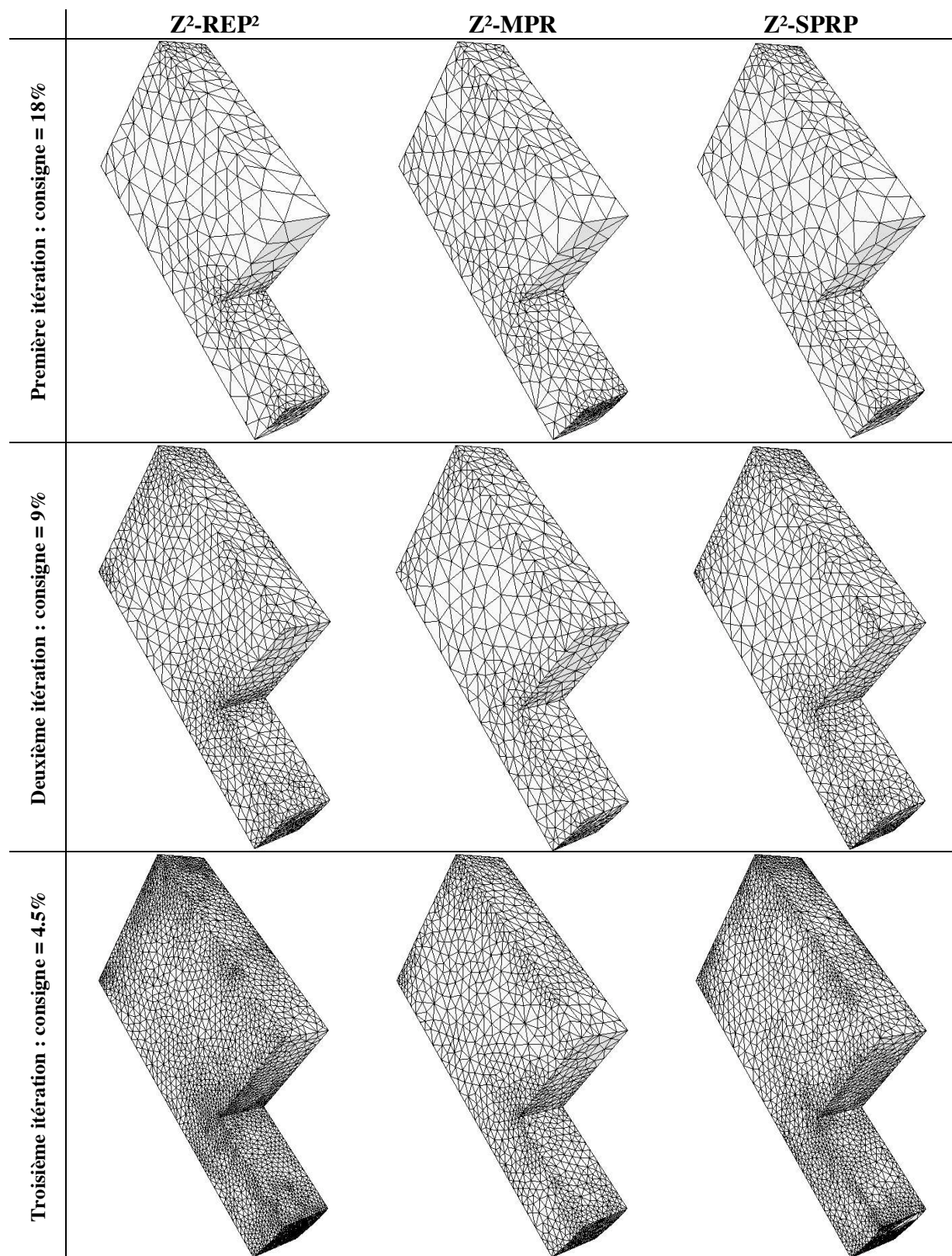


Figure 5.33 : Raffinement adaptatif

5.3.2.4 Synthèse

- Au niveau local, et pour un élément intérieur, les techniques de recouvrements présentent pratiquement la même efficacité. Sur la frontière la technique MPR est toujours la plus efficace, ce qui confirme les résultats obtenus en élasticité.
- Les tests numériques ont montré que l'efficacité du recouvrement augmente avec le raffinement du maillage. La même conclusion a été retenue en élasticité.
- La pondération de la contribution des voisins secondaires pour les technique $REP^2(\omega=0,1)$ et $MPR(\omega=0,1)$ semble améliorer leur efficacité.
- Les propriétés de superconvergence obtenues en élasticité ne se retrouvent pas en viscoplasticité, il n'y a pas donc de raisons pour que les indices d'efficacité tendent vers 1 [Zienkiewicz 88], [Fourment 92]. Des facteurs correctifs sont alors déterminés à partir des deux problèmes étudiés. Pour les estimateurs Z^2 -SPR, Z^2 -SPRP et Z^2 REP² les indices d'efficacité convergent vers 0,8 par valeurs supérieures et avec plus de régularité pour l'estimateur Z^2 -REP². Pour l'estimateur Z^2 -MPR, l'indice d'efficacité se rapproche de 0,65 mais un peu moins nettement.
- L'application au remaillage adaptatif semble montrer que le facteur correctif de l'estimateur Z^2 -MPR dépend du type maillage. La valeur de 1,6 obtenue sur des maillages réguliers n'est pas fiable sur les maillages arbitraires. Ceci nuit à la fiabilité de l'estimation d'erreur, bien que la procédure d'adaptation soit aussi fiable que celle utilisant les autres estimateurs.
- Il est possible que les différences de comportement observées en élasticité et en viscoplasticité viennent d'une plus grande importance des gradients en non linéaire. Par conséquent, la propriété de continuité de la solution recouverte devient davantage nécessaire, ce qui pourrait expliquer les moins bonnes performances de MPR en viscoplasticité. Il pourrait donc être intéressant, comme mentionné au chapitre 4, d'étudier l'apport du recouvrement en plusieurs itérations de MPR plutôt qu'une seule.

Chapitre 6

Remaillage adaptatif : applications

Résumé

Ce chapitre est dédié à la validation de la procédure du remaillage adaptatif sur des applications concrètes de mise en forme des matériaux. Nous proposons une stratégie d'adaptation fiable et pragmatique et nous l'appliquons sur des problèmes industriels : forgeage d'un triaxe, forgeage d'un engrenage¹, procédé de filage², forgeage d'un panneau de commande³ et de poinçonnement d'une tôle.

¹ ASCOFORGE SAFE

² FORGES DE BOLOGNE

³ A&D FORTECH (établissement de Pamiers)

6.1 Introduction

Les estimateurs d'erreur et la procédure d'adaptation de maillage ont été jusqu'ici appliqués dans le cas stationnaire (les analyses sont faites sur un seul pas de temps). Les procédés de mise en forme des matériaux étant des problèmes instationnaires, la géométrie du problème ainsi que l'erreur de discrétisation spatiale évoluent au cours du temps. Les calculs lagrangiens sont très sévères quant à la précision des calculs ; la qualité de la solution en fin de procédé dépend fortement de sa qualité tout au long du trajet de déformation. De très faibles imprécisions sur le calcul des champs pourraient s'amplifier au cours du temps avec la complexification de l'écoulement de la matière, ce qui met en cause la fiabilité de la solution finale. Il s'avère alors important de mettre au point une procédure d'adaptation de maillage qui contrôle la précision à chaque instant afin d'optimiser l'évolution du maillage au cours du temps.

Dans la première partie de ce chapitre on se propose de développer une procédure d'adaptation de maillage pragmatique et fiable pour les problèmes de mise en forme des matériaux. La seconde partie sera consacrée à l'application et la validation de cette procédure sur des applications purement industrielles.

6.2 Vers une stratégie d'optimisation fiable pour la mise en forme des matériaux

La première stratégie d'optimisation de maillage (SO1) introduite dans le chapitre 3 (cf. § 3.4.1) a été implémentée. Celle-ci consiste, nous le rappelons, à calculer la taille idéale que devrait avoir chacun des éléments du maillage pour que l'erreur de discrétisation soit uniformément répartie et inférieure à une valeur donnée (tolérée par l'utilisateur). Il est alors possible d'estimer l'erreur de discrétisation à chaque pas de calcul et, au moment des remaillages, de créer un maillage optimal au sens précédemment expliqué. L'expérience a montré que si nous souhaitons maintenir une précision donnée, la taille du problème augmente de manière imprévisible, éventuellement jusqu'à saturation des moyens. Ceci nous a amenés à revoir notre stratégie d'optimisation et à penser au contrôle de taille du problème donc à adopter la deuxième stratégie SO2 (cf. § 3.4.2). Cela revient à dire que l'on souhaite effectuer les calculs les plus précis possible pour un coût de calcul (nombre d'éléments) fixé. En pratique la considération d'une seule des deux stratégies d'optimisation présente des inconvénients. La première (SO1), paraît la plus naturelle du fait que la taille du problème suit l'évolution de la complexité de l'écoulement tout le long du procédé. Néanmoins, et comme nous l'avons indiqué, l'augmentation incontrôlée du nombre d'éléments peut entraîner dans la majorité des cas des dépassements des moyens et l'arrêt des calculs. La deuxième approche (SO2) est plus pragmatique, mais elle n'est pas cohérente toute seule. En effet, pour les problèmes évolutifs tels que ceux du forgeage, il n'est pas commode de considérer une taille de problème fixe alors que la complexité de ce dernier évolue au cours de temps. Au début du procédé, lorsque l'écoulement est simple, il ne paraît pas logique d'attribuer les mêmes moyens de calcul qu'à la fin du procédé lorsque l'écoulement et la géométrie sont très complexes. Ces réflexions nous amènent à considérer une stratégie plus adaptée au problème du forgeage et plus généralement aux problèmes dont la complexité évolue au cours du temps. Elle consiste à contrôler la précision des calculs par la stratégie SO1 tant que la taille du problème n'excède pas une valeur maximale. Une fois cette valeur dépassée, on continue les calculs avec une taille de problème fixe selon la stratégie SO2 de sorte que les calculs soient les plus précis possibles avec un nombre d'éléments fixe. Ceci revient finalement à optimiser

le maillage à précision fixée avec une contrainte sur le nombre d'éléments. Les étapes principales de cette procédure sont :

Etant donné un maillage initial T , une précision imposée θ^{imp} et un nombre maximale d'éléments imposé $N_{\text{belt}}^{\text{imp}}$:

- (a) calculer l'erreur globale estimée θ et les contributions élémentaires θ_e sur le maillage initial T
- (b) calculer le maillage optimal T^{opt} selon la stratégie SO1.
- (c) calculer le nouveau nombre d'éléments N_{belt} dans le maillage T^{opt} selon 3.15
 - si $N_{\text{belt}} \leq N_{\text{belt}}^{\text{imp}}$ alors le maillage T^{opt} est accepté et la nouvelle carte de taille est retenue
 - sinon : calculer un nouveau maillage optimal selon la stratégie SO2.
- (d) envoi de la nouvelle carte de taille au générateur de maillage et construction du maillage T^{opt}

Le calcul de l'estimation d'erreur (étape (a)) est fait à chaque incrément de calcul. Les étapes (b), (c) et (d) sont parcourues seulement lorsqu'un critère de déclenchement du remaillage est satisfait. Dans le logiciel Forge3[®] plusieurs critères de remaillage sont définis :

- remaillage sur la qualité volumique des éléments: lorsque un ou plusieurs éléments du maillage sont dégénérés suite aux importantes déformations subies par la pièce.
- remaillage sur période : la procédure de remaillage est automatiquement activée après un nombre fixe d'incrément de calcul.
- remaillage sur pénétration : lorsque la pénétration entre la pièce et les outils dépasse un certain seuil.
- remaillage sur l'accroissement de la déformation : lorsque la déformation a atteint un certain seuil depuis le début des calculs ou le dernier remaillage.

Remarque

Dans les applications, le remaillage n'est pas déclenché sur un critère d'erreur. La procédure de remaillage adaptatif permet de piloter le remaillage, et donc de produire un maillage optimale lorsque l'un des critères décrits précédemment est satisfait. En effet, l'étape de remaillage est coûteuse, aussi durant la simulation, on évite de remailler trop souvent. D'autre part l'expérience a montré que l'évolution de l'erreur est presque toujours liée à un changement de géométrie (accroissement de la déformation) ou des conditions de contact (pénétration pièce/outils), qui sont des critères de déclenchement du remaillage.

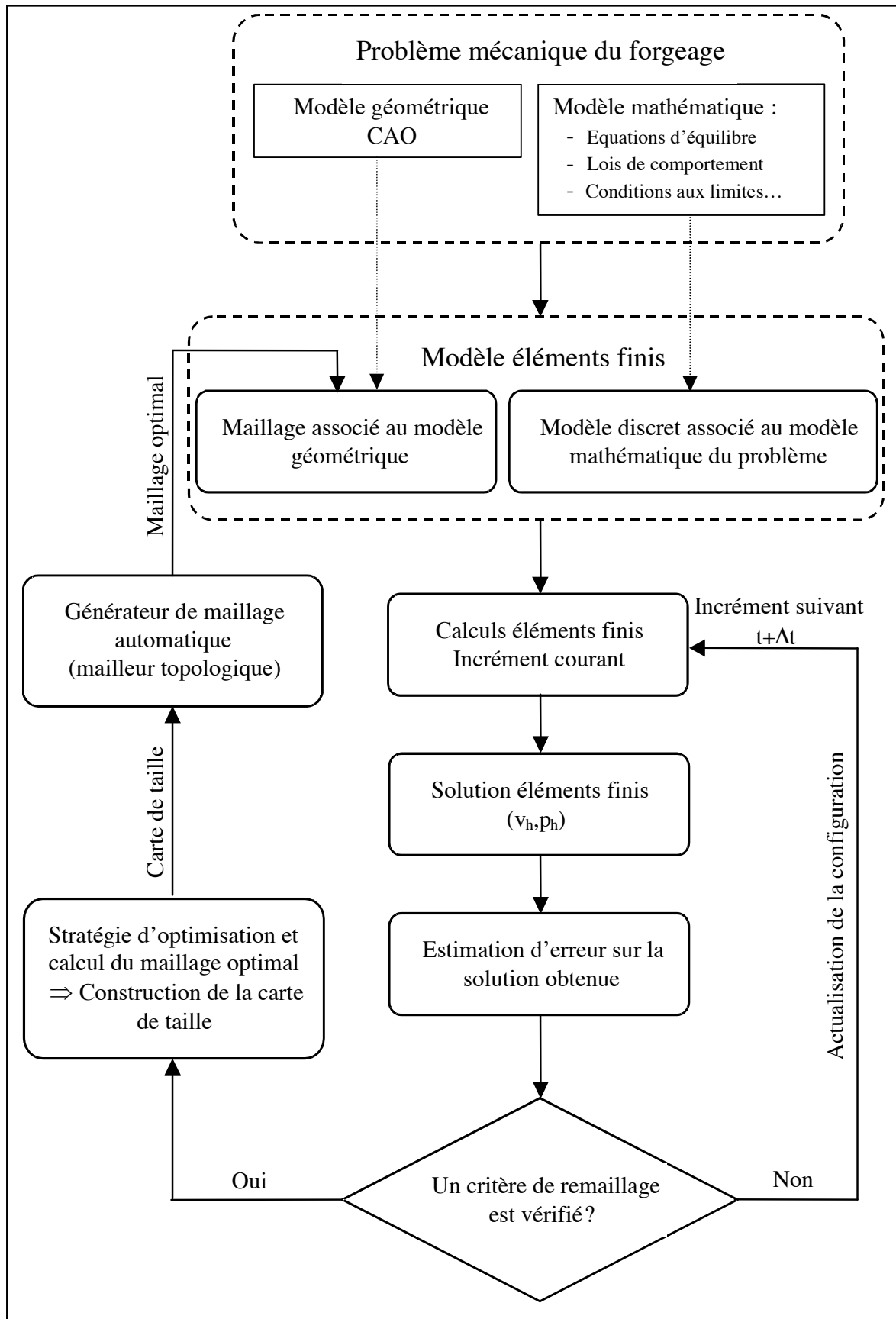


Figure 6.1 : Représentation schématique de la procédure d'adaptation de maillage

L'expérience a montré que la performance d'une procédure adaptative dépend étroitement de l'aptitude du mailleur à respecter la carte de taille calculée par la stratégie d'optimisation. Une manière d'évaluer un générateur de maillage est de calculer le rapport χ entre la taille de maille en consigne h^{opt} (la taille optimale calculée) et la taille de maille obtenue à la sortie du mailleur $h^{réel}$:

$$\chi = \frac{h^{réel}}{h^{opt}} = \frac{\text{taille obtenue}}{\text{taille demandée}} \quad (6.1)$$

Les tests numériques montrent que l'efficacité du mailleur dépend du coefficient de modification de la taille r^e . Lorsque la valeur de celui-ci est localement très importante (déraffinement important) ou très faible (raffinement important) le mailleur rencontre des difficultés lors du processus de la création des connectivités entre les éléments. Même si ce processus aboutit à un maillage valide la carte de taille en consigne n'est plus respectée. En effet, on ne peut pas faire varier trop brutalement la taille de maillage (par exemple un élément de taille 1 ne peut jouxter un élément de taille 10). Il s'agit donc de communiquer une contrainte topologique au calcul de la taille des éléments. Cependant, la prise en compte de cette contrainte dans un processus d'optimisation de maillage est un problème délicat. Une approche simple consiste à limiter le raffinement et le déraffinement dans un même remaillage (figure 6.2). Ceci aide à générer des zones de transition (tailles de maille intermédiaires) entre les zones très raffinées et le reste du maillage. On introduit alors un encadrement du coefficient de modification de taille :

$$\alpha \leq r_e \leq \beta \text{ et } \alpha < 1 < \beta \quad (6.2)$$

Les valeurs de α et β sont fournies par l'utilisateur et ajustées numériquement en fonction des différentes applications concrètes. L'expérience a montré que la mailleur donne des résultats satisfaisants (du point de vue du respect de la carte de taille) pour les valeurs de $\alpha=0,25$ et $\beta=2$.

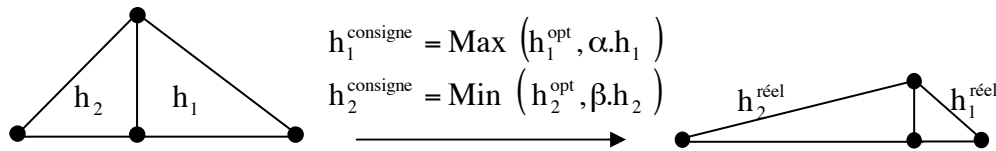


Figure 6.2 : Contrainte topologique liée au mailleur (2D)

La procédure d'adaptation tenant compte de cette nouvelle contrainte est :

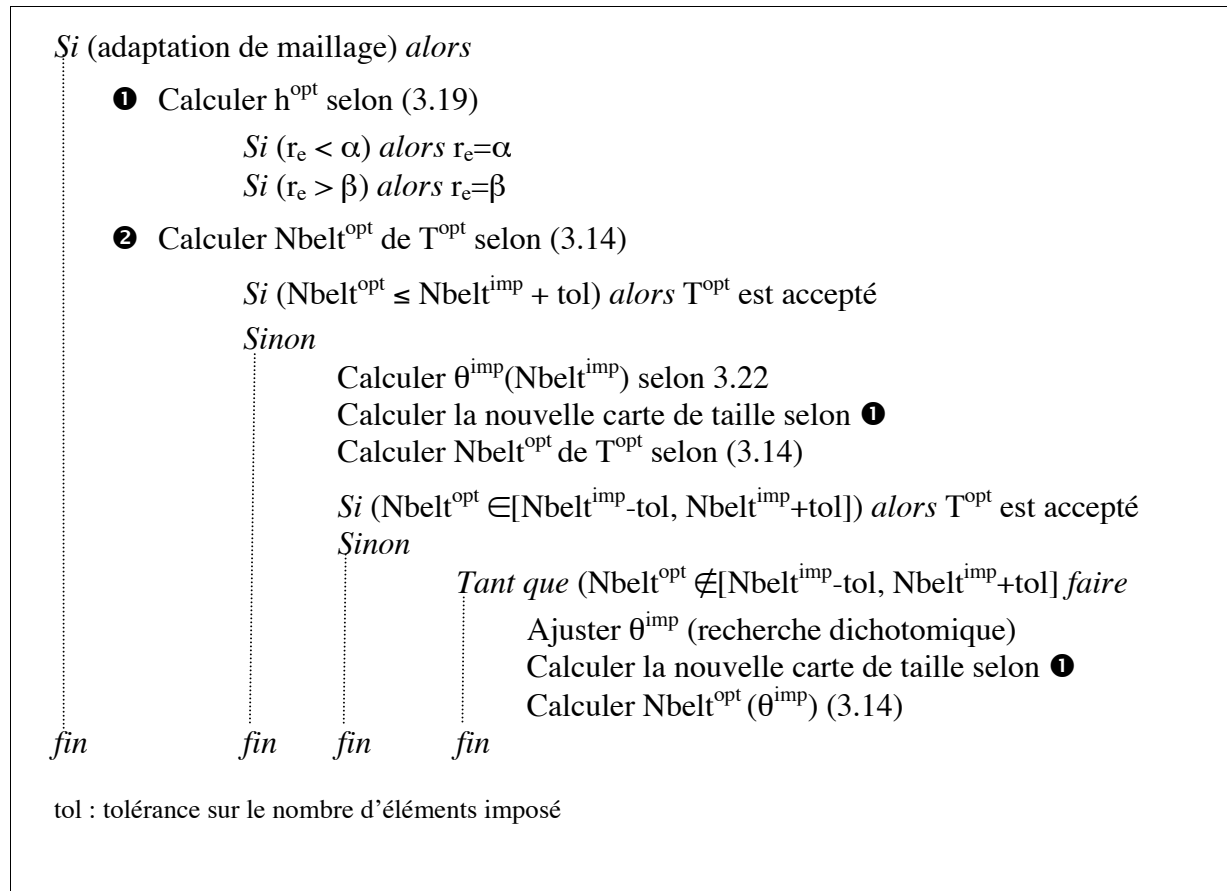


Figure 6.3 : Procédure d'adaptation de maillage

Remarques

- Dans la procédure d'adaptation, la condition ($Nb_{elt}^{opt} \notin [Nb_{elt}^{imp} - tol, Nb_{elt}^{imp} + tol]$) est due à de nombreuses corrections sur h^{opt} (contrainte topologique). Par conséquent, le nombre d'éléments calculé ne satisfait plus la relation (3.14) et peut être inférieur à ($Nb_{elt}^{imp} - tol$).
- L'ajustement de θ^{imp} dans la procédure d'adaptation consiste à chercher par une technique de dichotomie la valeur de θ^{imp} telle que $Nb_{elt}^{opt} \in [Nb_{elt}^{imp} - tol, Nb_{elt}^{imp} + tol]$.
- La tolérance « tol » sur le calcul du nombre d'éléments imposé est de 10 %

6.3 Applications

6.3.1 Forgeage d'un triaxe

Nous considérons le problème de forgeage d'un triaxe (figure 6.4). Le matériau considéré est viscoplastique obéissant à la loi de Norton-Hoff (1.39) avec $m = 0,145$ et la consistance K suit la loi d'écrouissage (1.41) avec les paramètres suivants :

$$\begin{cases} \beta = 2,69 \cdot 10^{-3} \\ n = 0,127 \\ \varepsilon_0 = 10^{-4} \\ k_0 = 1,498 \cdot 10^3 \text{ MPa} \end{cases}$$

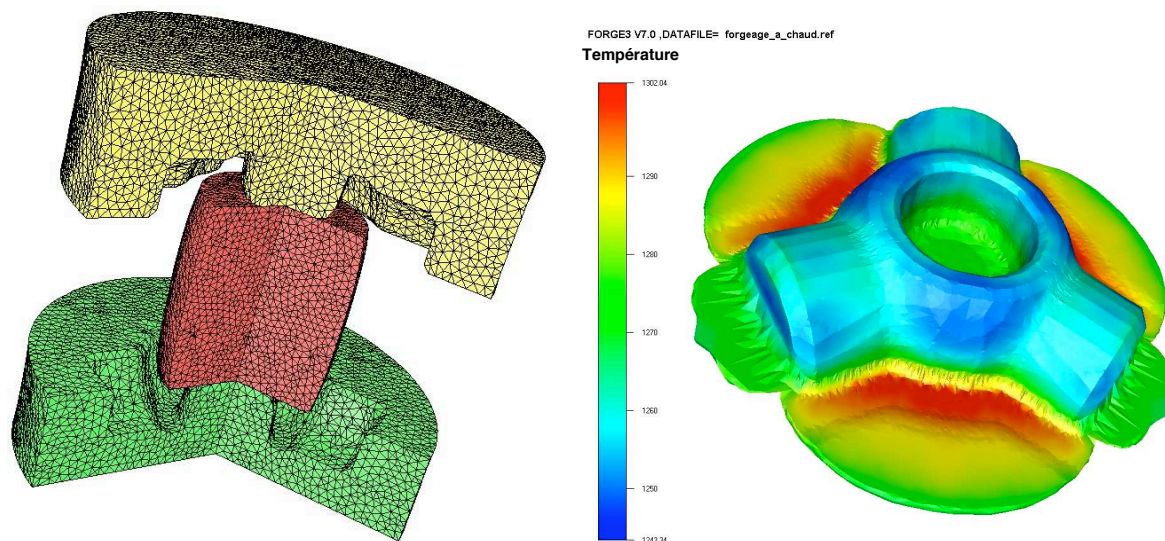


Figure 6.4 : Simulation du forgeage d'un triaxe
Ensemble lopin + outils (à gauche) et pièce finie (à droite)

Les températures initiales de la pièce et des outils sont respectivement 1250°C et 250°C. Nous considérons une loi de frottement de type Coulomb limitée par Tresca (1.57) avec les paramètres $\bar{m} = 0,3$ et $\mu = 0,15$.

6.3.1.1 Remaillage adaptatif dans la pièce à forger

Dans cette première partie, les outils de forgeage sont supposés rigides (pas de déformation dans les outils). L'adaptation de maillage ne concerne que la pièce (le lopin). Pour la procédure d'adaptation, nous nous fixons comme erreur de consigne $\theta^{\text{imp}} = 15\%$ et un nombre maximal d'éléments de 20000 avec une tolérance de 10%.

Une première simulation a été faite sans optimisation de maillage (le remaillage se fait en respectant la carte de taille initiale) et avec un maillage initial comportant 15364 éléments et 4058 nœuds (figure 6.4 à gauche). Nous suivons l'évolution de l'erreur estimée et le nombre d'éléments du maillage au cours de la déformation. Le maillage final comporte 25101 éléments et 6224 nœuds.

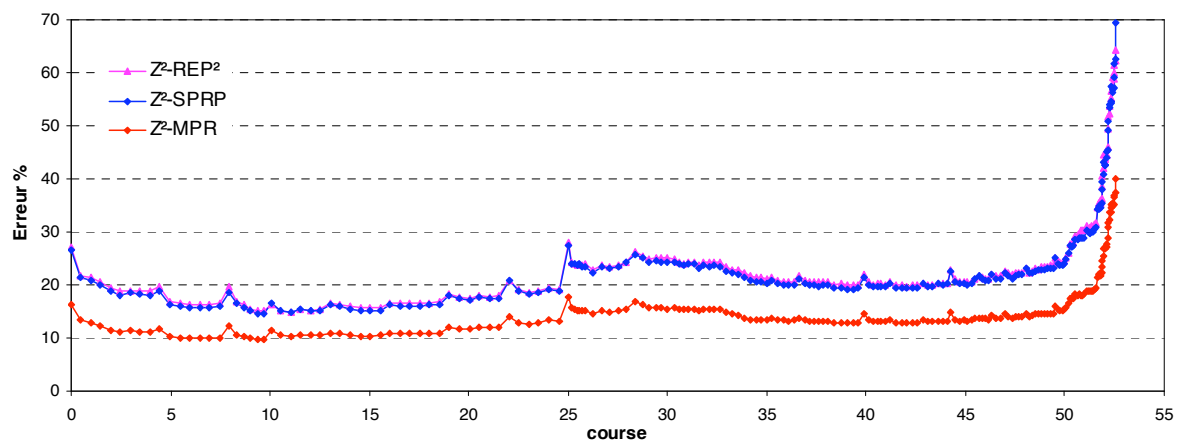


Figure 6.5 : Évolution de l'erreur au cours de la simulation de forgeage d'un triaxe sans optimisation de maillage

La figure 6.5 montre l'évolution de l'erreur estimée (sans facteur correctif) donnée par les estimateurs Z^2 -SPRP, Z^2 -REP² et Z^2 -MPR. Nous remarquons que le comportement des deux premiers est pratiquement le même durant tous les incréments de calcul alors que l'estimateur Z^2 -MPR donne une estimation inférieure de 36% en moyenne.

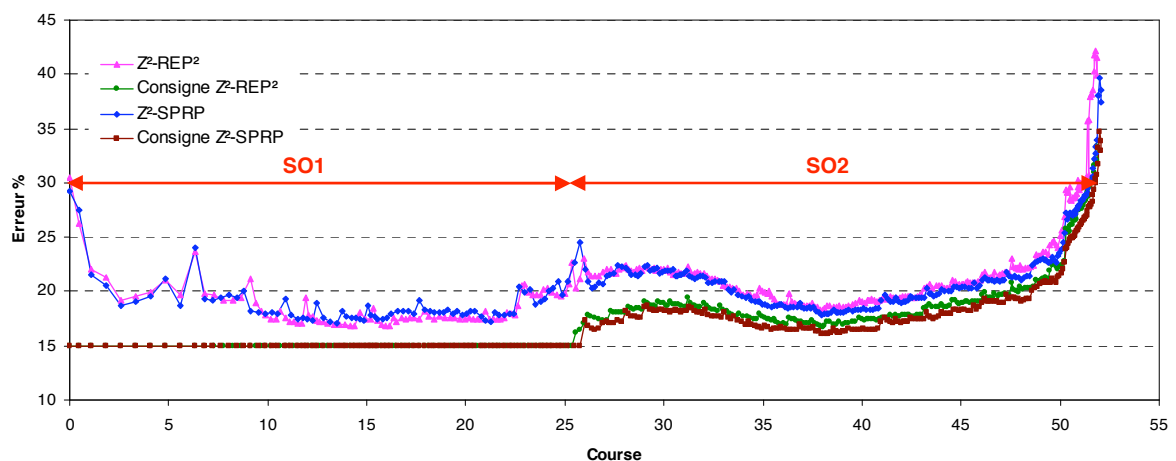


Figure 6.6 : Évolution de l'erreur au cours de la simulation du forgeage d'un triaxe avec optimisation de maillage - $\theta^{imp} = 15\%$

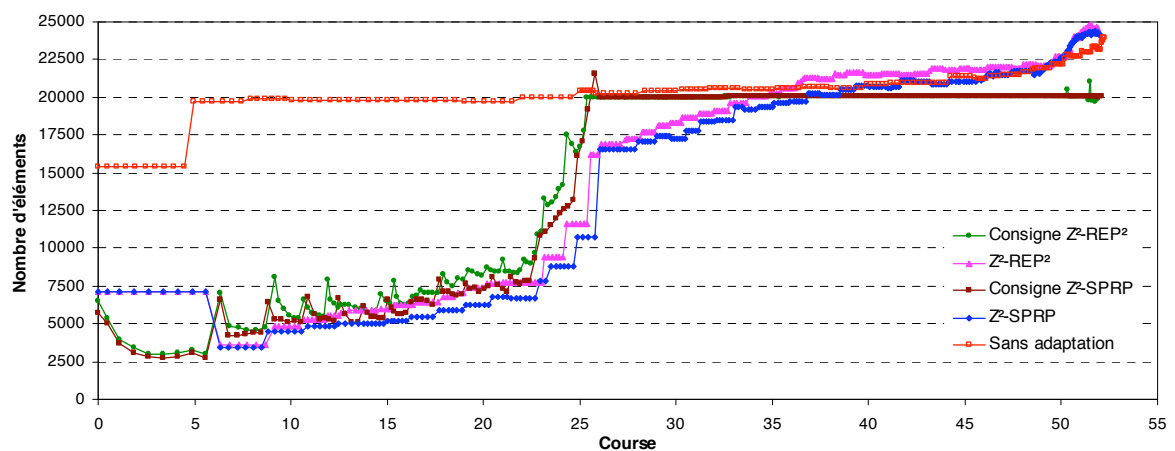


Figure 6.7 : Évolution du nombre d'éléments au cours de la simulation du forgeage d'un triaxe avec optimisation de maillage - $N_{bel}^{imp} = 20000$

L'évolution de l'erreur au cours de la simulation avec remaillage adaptatif est représentée sur la figure 6.6. Au début, l'adaptation de maillage suit la première stratégie SO1 respectant le niveau d'erreur imposé (15%). Soulignons qu'après le premier remaillage (après une course de 6 mm), l'erreur estimée tend à se rapprocher de l'erreur imposée. Après trois remaillages, le niveau atteint donné par les deux estimateurs d'erreur est de 17%. La figure 6.7 montre l'évolution du nombre d'éléments dans le maillage. Nous remarquons qu'au-delà d'une course de 26 mm la valeur du nombre maximal d'éléments est atteinte, la procédure d'adaptation bascule alors vers la deuxième stratégie SO2. Le niveau de précision est ainsi augmenté afin de satisfaire la taille prescrite du problème. Le nombre d'éléments calculé oscille autour de la valeur maximale.

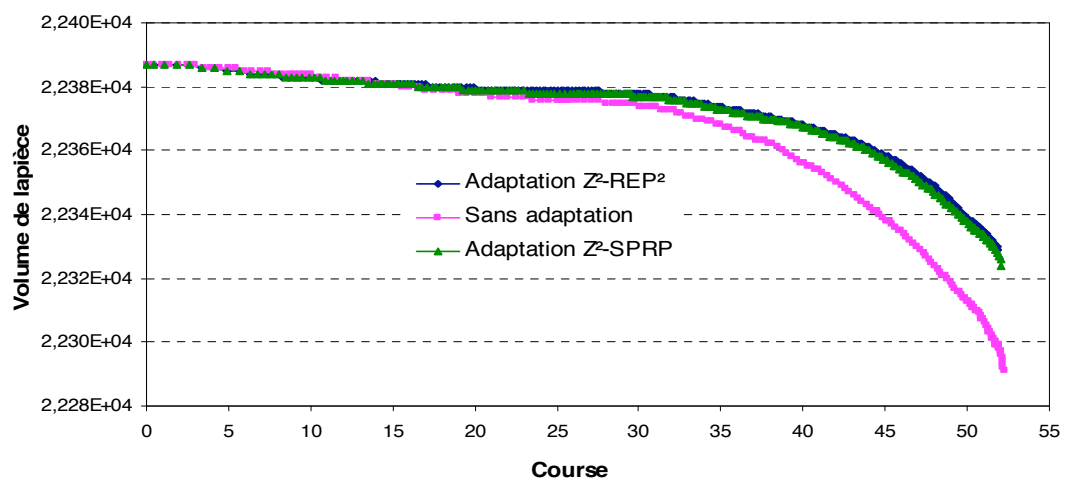


Figure 6.8 : Évolution du volume de la pièce au cours de la simulation du forgeage d'un triaxe avec remaillage adaptatif

L'analyse simultanée de l'évolution du nombre d'éléments et de l'erreur estimée montre l'importance de l'optimisation de maillage. En effet, au début du procédé (après le premier remaillage) et pour des niveaux de précision comparables, les maillages adaptés contiennent en moyenne 4 fois moins d'éléments que les maillages non adaptés (au sens optimisation) (figure 6.7). A la fin du procédé et pour des nombres d'éléments comparables l'adaptation de maillage permet d'améliorer significativement la précision des calculs. L'erreur estimée en fin de course (donnée par les estimateurs Z²-REP² et Z²-SPRP) sur les maillages adaptés est autour de 40% alors que pour les maillages non adaptés le niveau d'erreur est autour de 70% et ce pour des nombres comparables d'éléments et de nœuds.

Course	Nombre d'incréments		Nombre de remaillages		Nombre éléments/nœuds		Erreur estimée		Temps CPU ⁽³⁾	
	25mm	52mm	25mm	52mm	25mm	52mm	25mm	52mm	25mm	52mm
Sans adaptation	53	179	9	36	20379 4626	23194 5631	⁽¹⁾ 27,92% ⁽²⁾ 27,44%	35,50% 34,60%	2h et 59mn	12h et 7mn
Adaptation Z²-REP²	88	289	19	59	11583 2918	24119 6659	19,51%	30,18%	1h et 29mn	14h et 39mn
Adaptation Z²-SPRP	79	273	15	53	10741 2713	22619 6140	19,69%	28,70%	1h et 10mn	13h et 18mn

⁽¹⁾ : Estimation Z²-REP², ⁽²⁾ : Estimation Z²-SPRP, ⁽³⁾ : calculs sur un P III 900 MHz

Tableau 6.1 Comparaison des résultats avec et adaptation de maillage

Le tableau 6.1 réunit les résultats obtenus sur deux incréments de calcul choisis au milieu et à la fin du procédé. Les résultats montrent l'apport de l'adaptation de maillage en terme de précision. Cependant, celle-ci permet de minimiser le coût des calculs seulement au début du procédé, lorsque l'écoulement de la matière est moins complexe. En s'approchant de la forme finale de la pièce, la surface de la matière libre entrant en contact avec les outils augmente, ce qui génère beaucoup plus de raffinement et le calcul a tendance à devenir plus lent. En effet, le raffinement de maillage nécessite de choisir de plus petits pas de temps dont la taille est comparable à celle que nous aurions obtenue avec un raffinement uniforme. En effet, la gestion du contact dans le logiciel Forge3[®] permet d'adapter l'amplitude des déplacements des nœuds frontaliers à la taille des éléments. Ceci permet d'ajuster le pas de temps de sorte qu'un seul nœud de la frontière libre entre en contact, ce qui oblige à utiliser de très petits pas de temps dans les zones de raffinement. En contre parti, c'est le raffinement dans ces zones de contact qui permet d'améliorer la qualité de la solution et assure ainsi une meilleure conservation du volume de la pièce (figure 6.8).

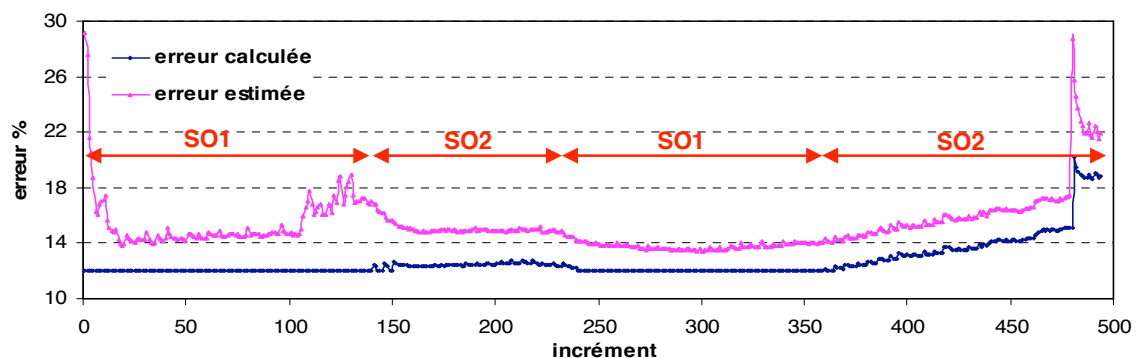


Figure 6.9 : Évolution du nombre d'éléments au cours de la simulation de forgeage d'un triaxe
 $\theta^{imp} = 12\%$

La même simulation a été faite en augmentant la taille du problème. Nous souhaitons, cette fois-ci, faire des calculs à 12% d'erreur avec un nombre d'éléments maximal de 100000. L'estimateur d'erreur considéré est le Z²-SPRP. L'évolution de l'erreur et du nombre d'éléments au cours du procédé sont représentés sur les figures 6.9 et 6.10. Celles-ci montrent la fiabilité de la procédure d'adaptation. Le contrôle de la taille du problème permet de piloter automatiquement le choix de la stratégie d'optimisation. Au cours du procédé, la complexité de l'écoulement évolue et il arrive souvent que l'erreur diminue, ce qui nécessite moins d'éléments dans le maillage (figure 6.10) et favorise ainsi le retour à la stratégie SO1 (figure 6.9)

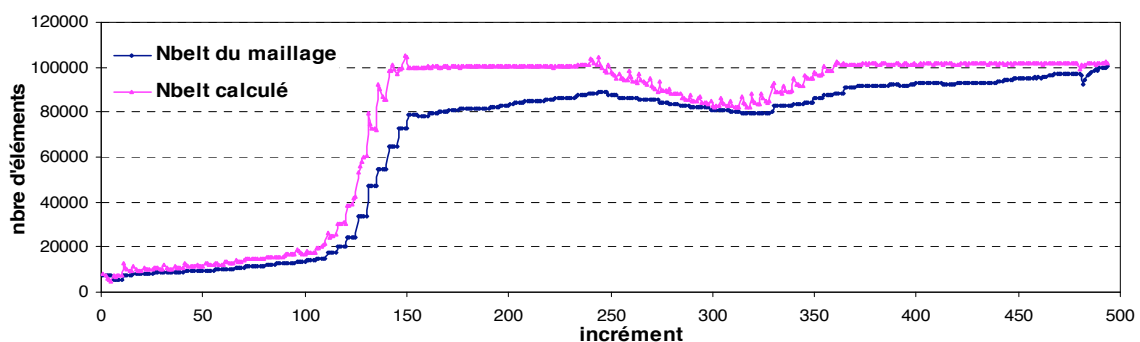
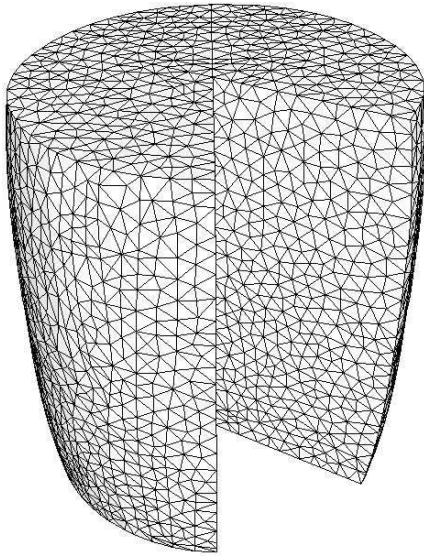
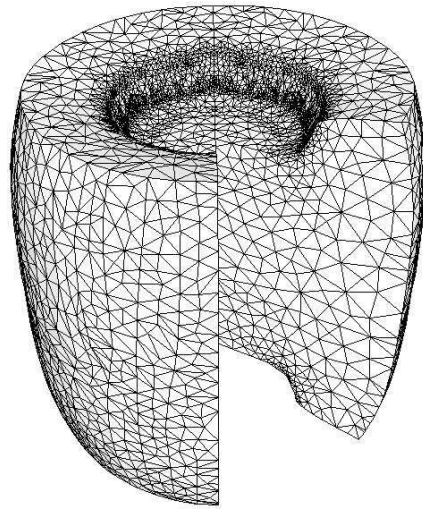


Figure 6.10 : Évolution du nombre d'éléments au cours de la simulation de forgeage d'un triaxe
 $N_{belt}^{imp} = 100000$

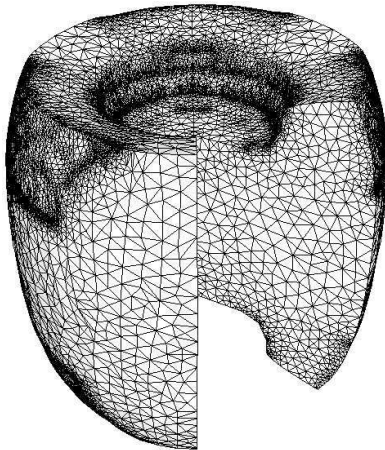
L'évolution du maillage au cours du procédé est représentée sur la figure 6.11. Nous observons l'évolution des zones de raffinement en fonction de l'évolution de la déformation.



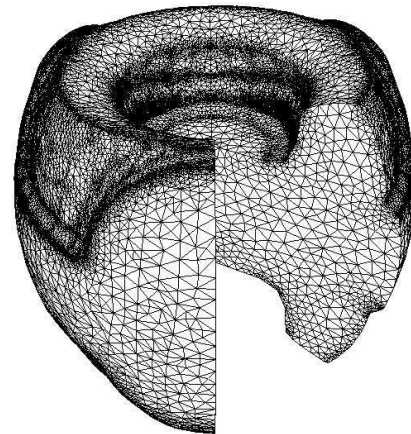
maillage initial : Nbelt = 7150 – Nbnoe = 1867



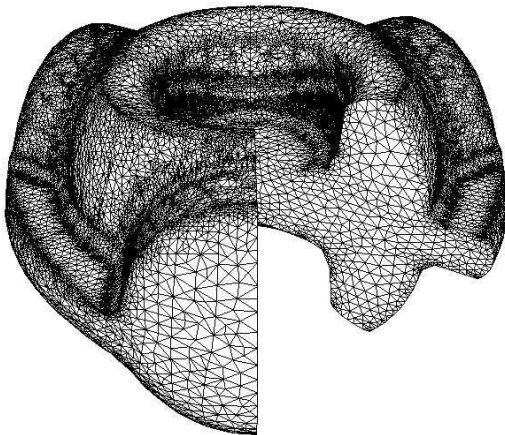
19^{ème} remaillage : Nbelt = 13483- Nbnoe = 3313



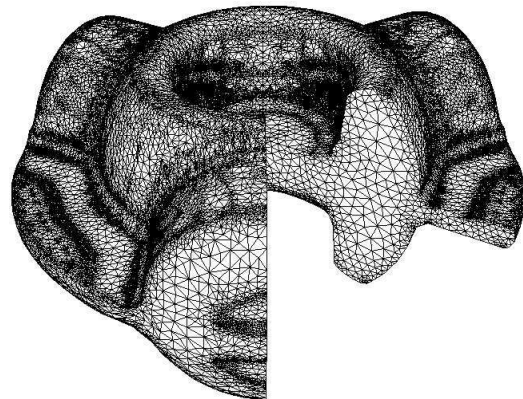
28^{ème} remaillage : Nbelt = 64608 – Nbnoe = 14077



61^{ème} remaillage : Nbelt = 82277 – Nbnoe = 19243



93^{ème} remaillage : Nbelt = 92474 – Nbnoe = 21757



152^{ème} remaillage : Nbelt = 99604 – Nbnoe = 24786

Figure 6.11 : Évolution du maillage au cours du forgeage d'un triaxe

La figure 6.12 montre l'évolution du rapport entre le nombre d'éléments calculé par la procédure d'adaptation (consigne du mailleur) et celui généré par le mailleur topologique. Ce rapport est en moyenne égal à 0,9 ce qui est une valeur très acceptable. Soulignons, d'une part, que cette valeur est sensible au choix des valeurs de α et β qui limitent le coefficient de modification de taille. D'autre part, le fait que le mailleur produise moins d'éléments que demandé, c'est-à-dire que les tailles des éléments sont plus grossières que les tailles consignes, explique en partie que l'erreur calculée soit toujours supérieure à l'erreur souhaitée.

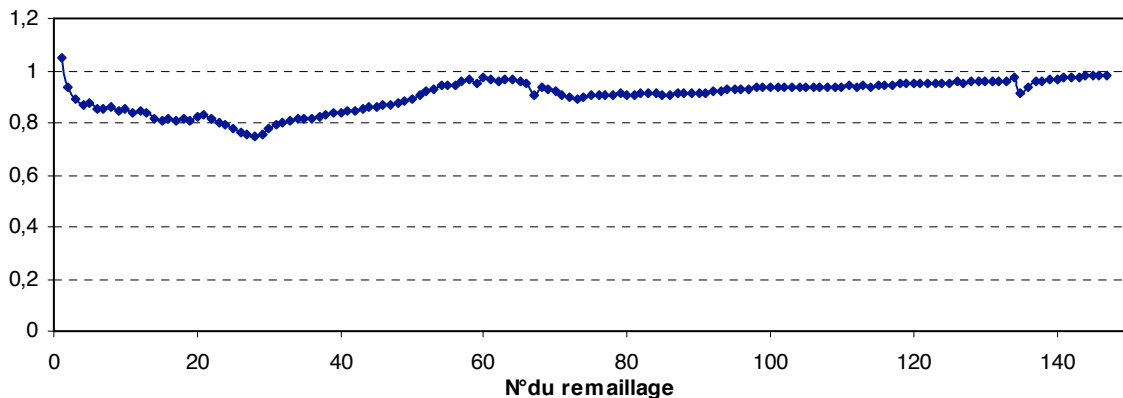


Figure 6.12 : Évolution du rapport entre le nombre d'éléments calculé et celui généré par le mailleur pour le problème de forgeage d'un triaxe

6.3.1.2 Remaillage adaptatif dans la pièce et les outils

Une version multi-corps de Forge3[®] permet de faire des calculs simultanément dans la pièce et les outils de forgeage. Du point de vue industriel, les enjeux économiques liés aux outils sont très importants (coût de changement, arrêt de production, traitement de surface, usinage, etc.). Le calcul dans les outils est encore plus intéressant lorsqu'il permet de prédire de manière efficace le degré de leur endommagement au cours de la production, permettant ainsi l'optimisation de leur durée de vie. L'adaptation de maillage dans les outils trouve ici toute son importance, dans la mesure où elle permet d'optimiser le maillage des outils, généralement plus volumineux que celui de la pièce à forger, tout en améliorant la précision de la solution. Dans ce qui suit, la procédure d'adaptation de maillage est appliquée dans la pièce et les outils. La déformation de ces derniers est supposée purement élastique. L'estimation d'erreur dans les outils est donnée par (2.55).

Pour le calcul dans la pièce, nous considérons les mêmes paramètres rhéologiques que précédemment. Pour les outillages les paramètres d'élasticité sont : le module de Young $E = 2.10^5$ MPa et le coefficient de poisson $\nu = 0,3$. Nous considérons les mêmes conditions initiales et le même type de frottement. Nous souhaitons faire des calculs avec une précision de 18% dans la pièce et 8% dans les outils. Les nombres maximaux d'éléments sont respectivement 20000 et 15000 avec la même tolérance de 10%. Nous considérons l'estimateur Z^2 -REP² pour le calcul d'erreur dans la pièce et Z^2 -SPRP dans les outils.

L'évolution de l'erreur dans la pièce et dans les outils est représentée sur la figure 6.13. Il est évident de constater qu'en élasticité l'erreur est généralement moins importante qu'en viscoplasticité et pour les comportements non linéaires en général.

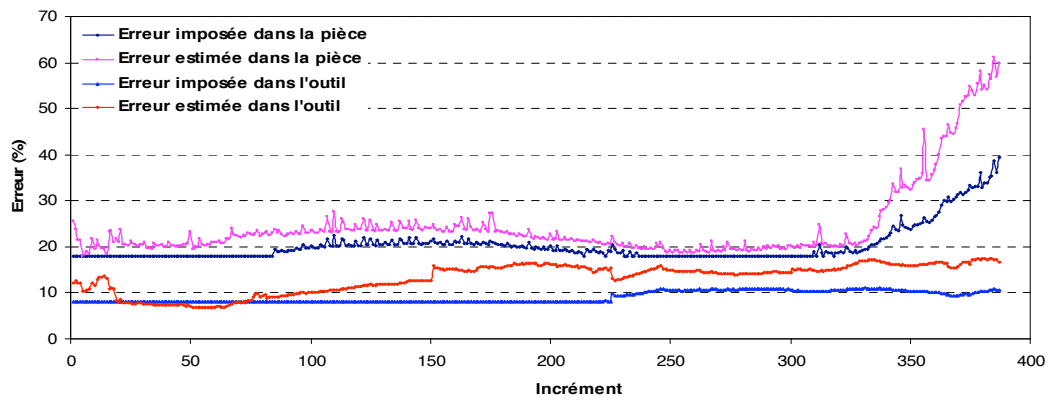


Figure 6.13 : Évolution de l'erreur dans la pièce et dans l'outil inférieur au cours du forgeage d'un triaxe
 $\theta^{imp}(pi\grave{e}ce) = 18\%$ - $\theta^{imp}(outil) = 8\%$

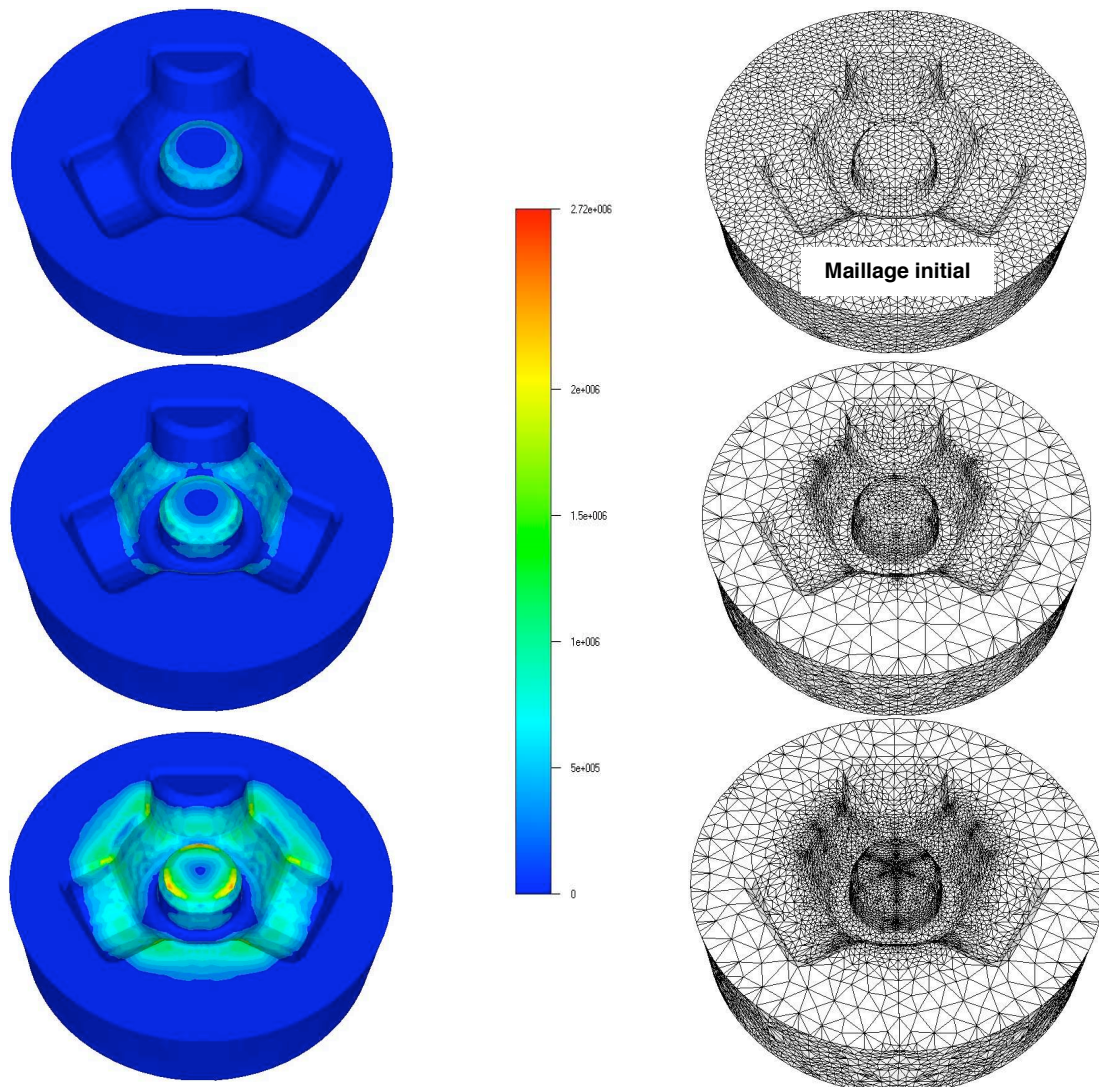


Figure 6.14 : Évolution du maillage et des isovaleurs de l'usure dans l'outil inférieur au cours du forgeage d'un triaxe

La figure 6.14 montre la corrélation entre l'évolution du maillage et des isovaleurs de l'usure dans l'outil inférieur au cours de la simulation. Les maillages adaptés dans la pièce et les outils sont représentés sur la figure 6.15.

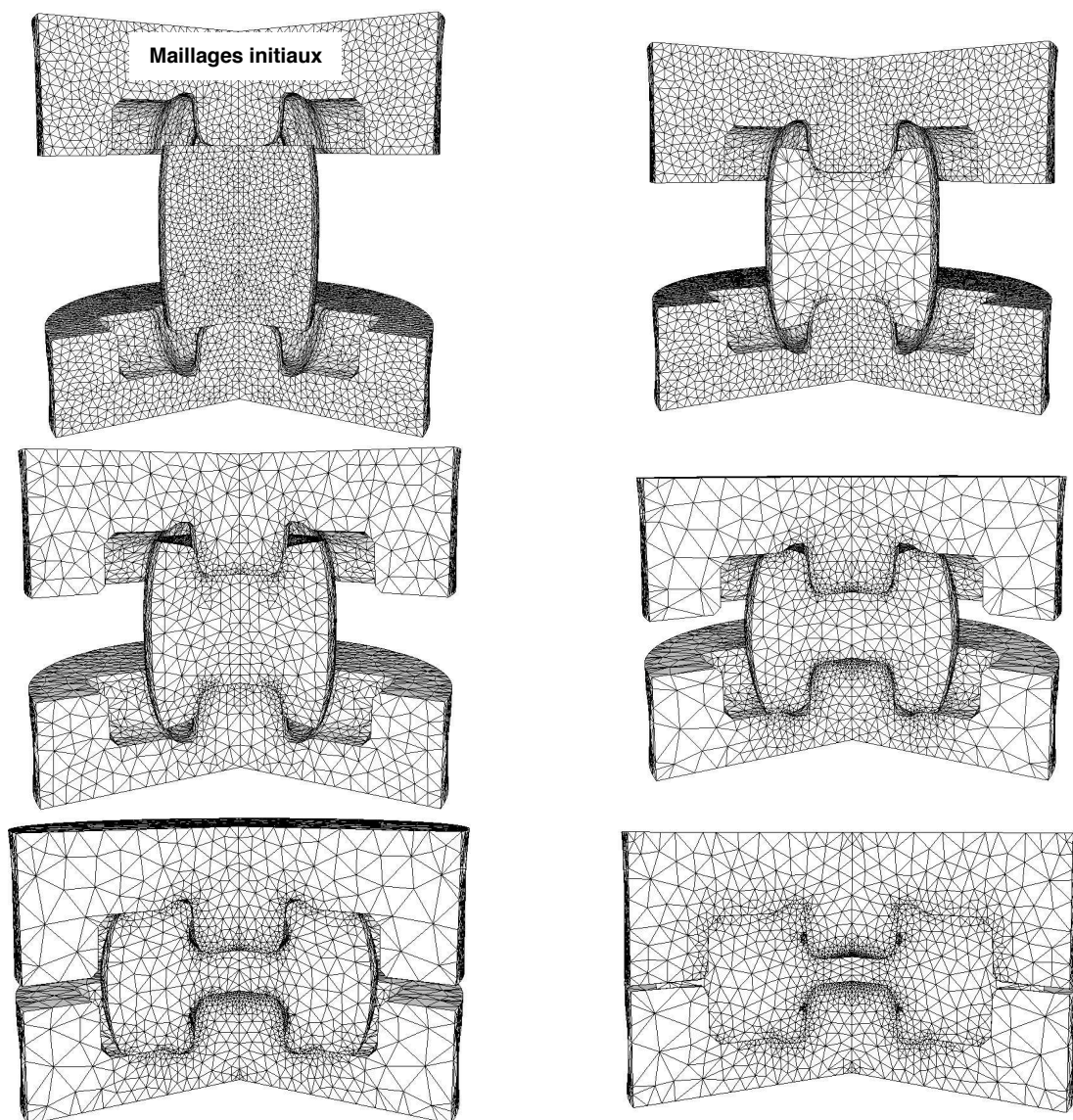


Figure 6.15 : Évolution des maillages dans la pièce et les outils au cours du forgeage d'un triaxe

FORGE3 V7.0 ,DATAFILE= forgeage_a_chaud.ref

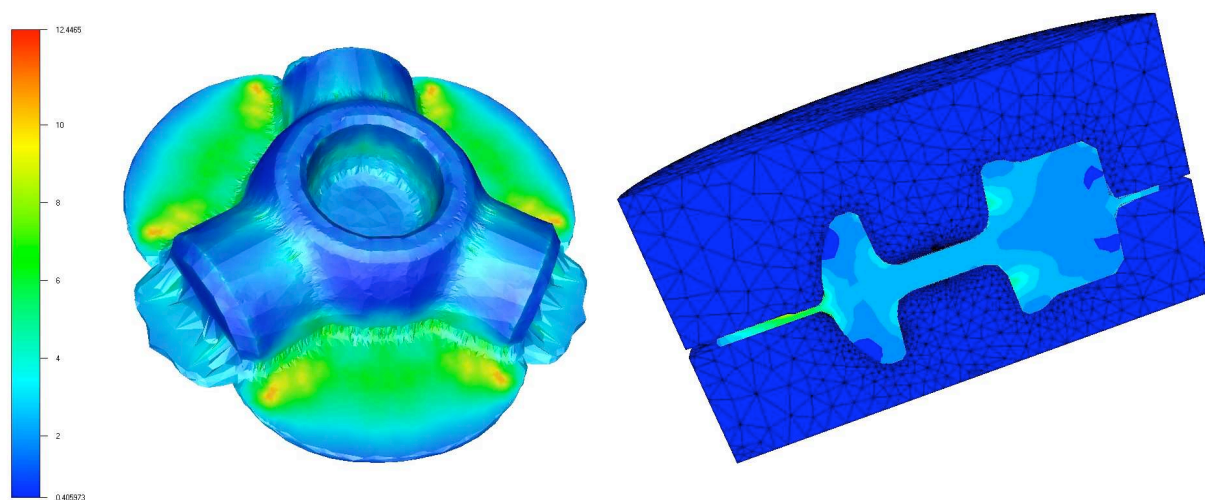


Figure 6.16 : Isovaleurs de la déformation équivalente dans la pièce

6.3.2 Forgeage d'un engrenage

Nous considérons un cas de simulation de forgeage d'un engrenage à partir d'une préforme axisymétrique (figure 6.17). La loi de comportement est de type Norton-Hoff avec les paramètres : $m = 0,139$ et $K = 1,69310^3$ MPa. Le frottement entre la pièce et les outils rigides est de type viscoplastique, donné par la loi puissance (1.53). Les paramètres de cette loi sont : $\alpha = 0,3$ et $q = 0,14$.

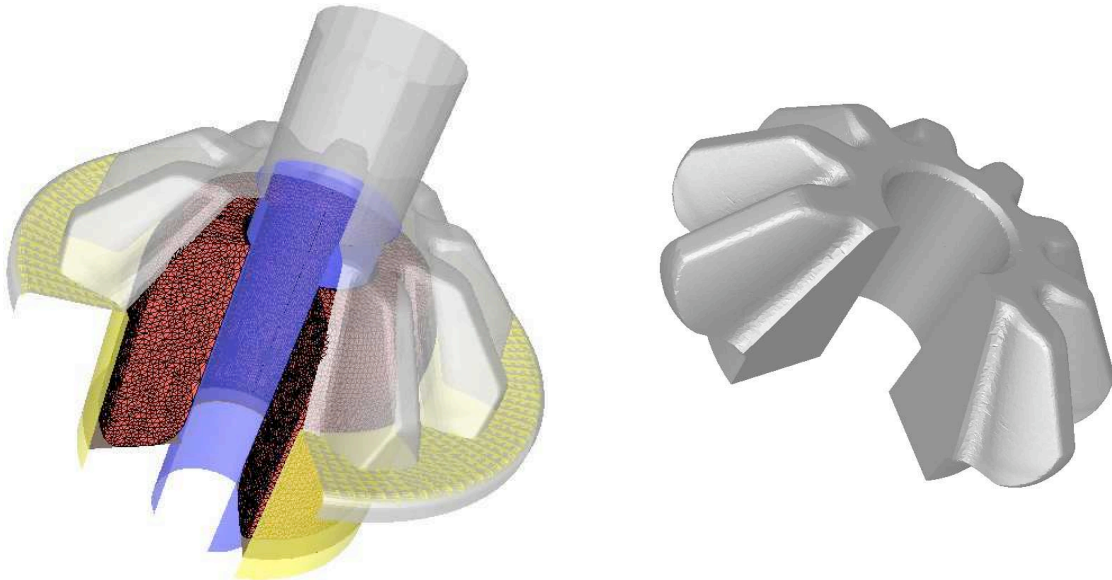


Figure 6.17 : Simulation de forgeage d'un engrenage
Ensemble préforme+outils (à gauche) et pièce finie (à droite)

Nous souhaitons adapter les maillages pour une précision de 10% avec un nombre maximal d'éléments de 25000. Pour le contrôle d'erreur, nous utilisons l'estimateur Z^2 -SPRP.

L'évolution de l'erreur estimée au cours des calculs est représentée sur la figure 6.18. 47 remaillages ont été nécessaires pour simuler tout le procédé. Les maillages adaptés sont représentés sur la figure 6.19. Nous soulignons la cohérence entre le maillage final et les isovaleurs de la déformation équivalente.

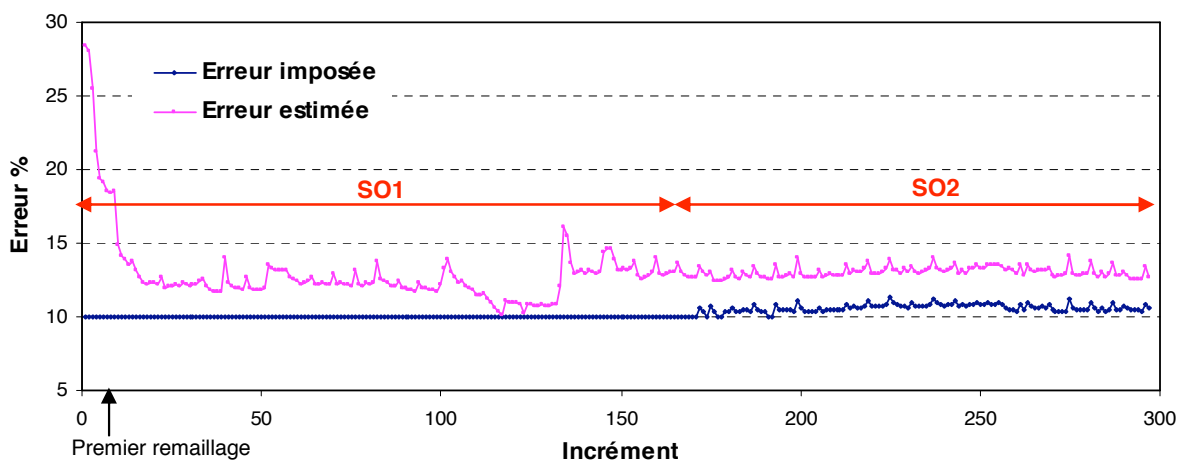


Figure 6.18 : Évolution de l'erreur dans la pièce au cours de la simulation du forgeage d'un engrenage
 $\theta^{imp} = 10\%$

La figure 6.20 montre l'évolution du rapport entre le nombre d'éléments calculé et celui généré par le mailleur topologique. Il se situe toujours dans l'intervalle de fiabilité [0.8, 1.2].

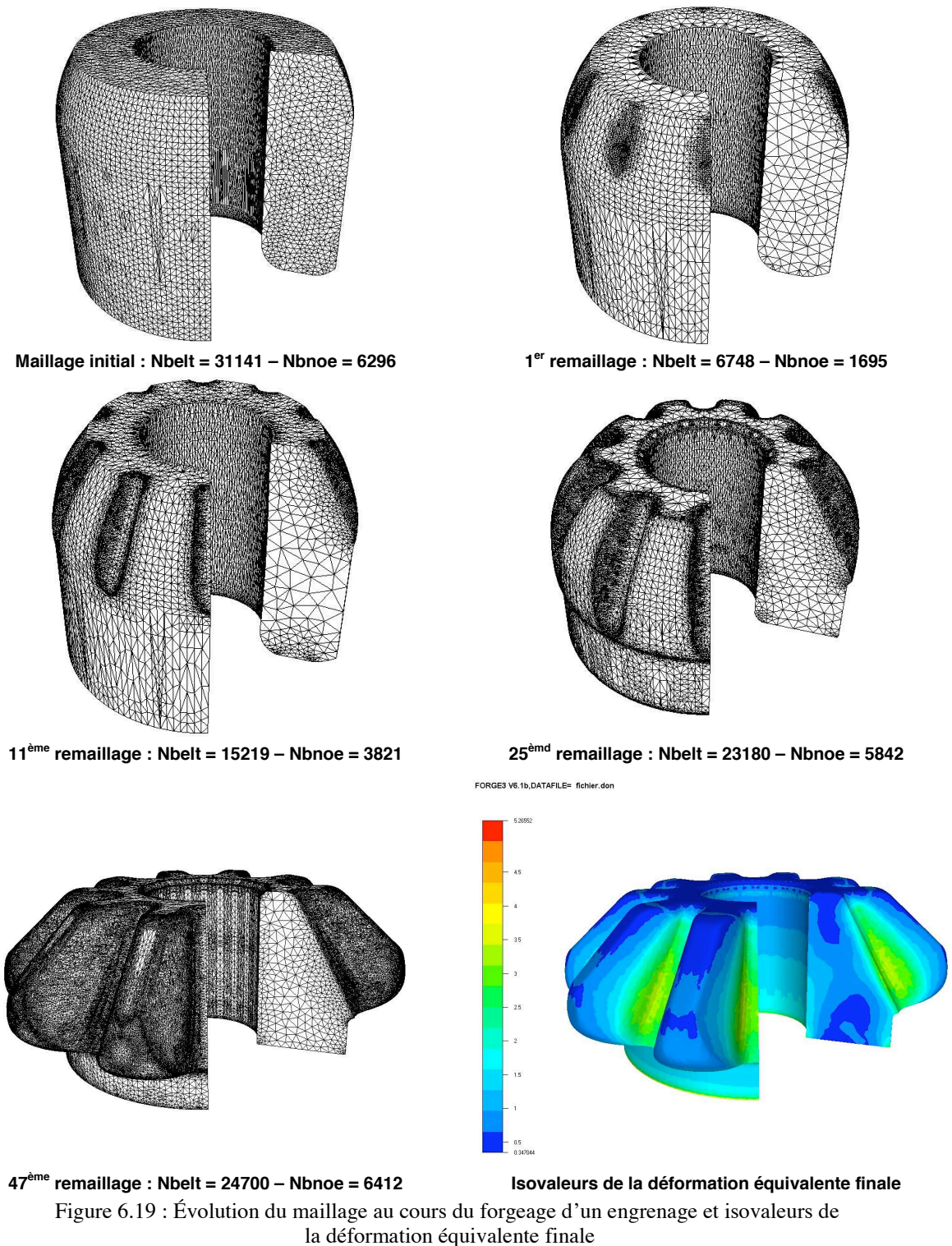


Figure 6.19 : Évolution du maillage au cours du forgeage d'un engrenage et isovaleurs de la déformation équivalente finale

Une étude comparative a été menée sur deux simulations avec deux configurations différentes : la première avec remaillage adaptatif et la deuxième utilisant une boîte de raffinement local (c'est-à-dire un raffinement «manuel» défini a priori par l'utilisateur) (figure 6.21). Les résultats sont comparés en terme de précision sur la conservation de volume de la pièce et l'évolution de l'effort de forgeage au cours du procédé (les résultats sont obtenus

dans le cas d'un matériau newtonien (loi Norton-Hoff avec $m = 1$). Les courbes d'évolution de l'effort et du volume de la pièce sont représentées sur les figures 6.22 et 6.23.

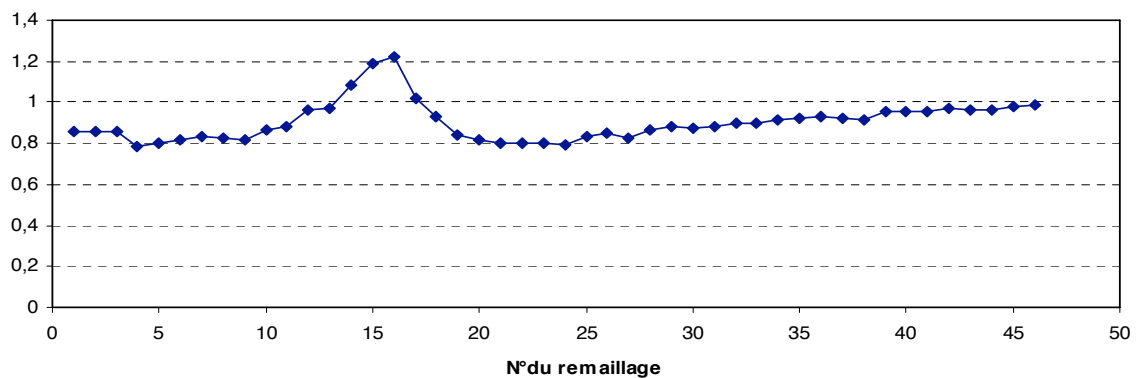


Figure 6.20 : Évolution du rapport entre le nombre d'éléments calculé et celui généré par le mailleur pour le problème du forgeage d'un engrenage

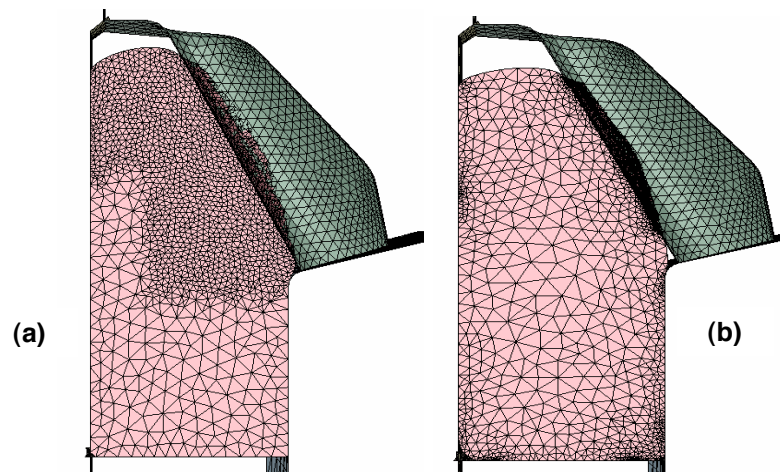


Figure 6.21 : Simulation de forgeage d'un engrenage avec deux configurations
(a) Sans optimisation de maillage – (b) Avec optimisation de maillage

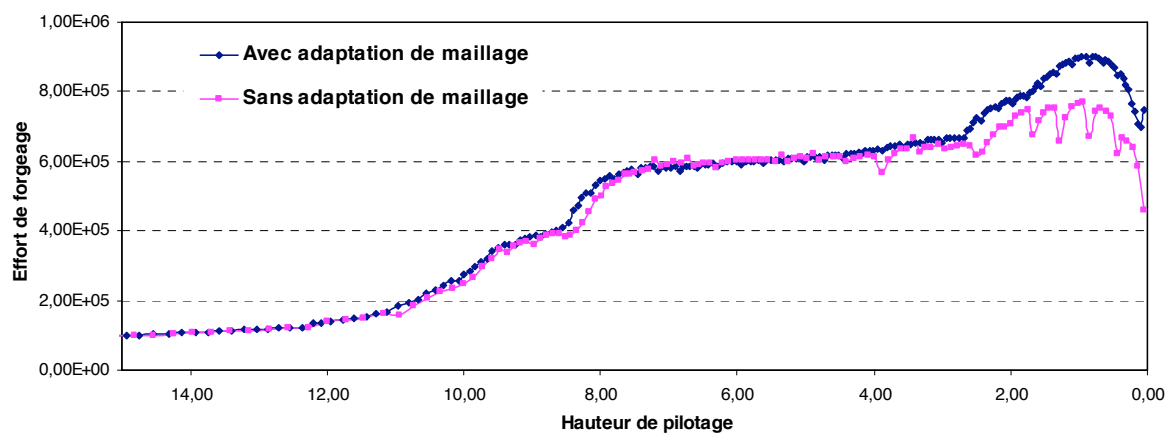


Figure 6.22 : Évolution de l'effort de forgeage au cours de la simulation d'un engrenage
(Zoom à partir d'une hauteur de pilotage $h=15$)

Au cours du procédé, en s'approchant de la forme finale de la pièce, la surface de contact outil/matière augmente et l'écoulement de la matière devient plus complexe. Ceci se traduit par l'augmentation continue de l'effort de forgeage (figure 6.22). La comparaison des résultats obtenus dans les deux configurations montre que l'adaptation de maillage permet d'améliorer la courbe de forgeage qui présente (dans le cas sans adaptation de maillage) des fluctuations numériques liées aux incréments de remaillages en fin de procédé. D'autre part, on souligne un écart important entre les valeurs maximales atteintes par l'effort de forgeage (768 KN sans adaptation contre 901 KN avec adaptation). Dans la mesure où l'on ne dispose pas de valeurs expérimentales, on ne peut pas donner un jugement ferme quant à la précision de ces deux résultats. Néanmoins, le suivi de l'évolution du volume de la pièce au cours du forgeage (figure 6.23) montre une meilleure conservation dans le cas de la simulation avec remaillage adaptatif. Ceci est assuré principalement grâce à une meilleure approximation de la frontière de la pièce, ce qui permet également d'améliorer la précision sur les efforts de forgeage par un meilleur calcul de la surface de contact.

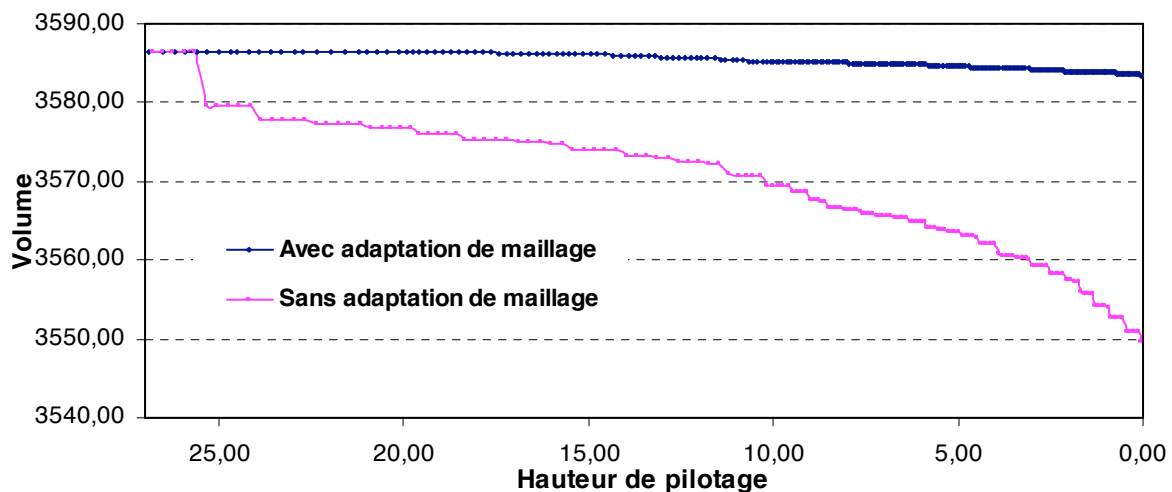


Figure 6.23 : Évolution du volume de l'engrenage au cours de la simulation

6.3.3 Filage à travers une filière ellipsoïdale

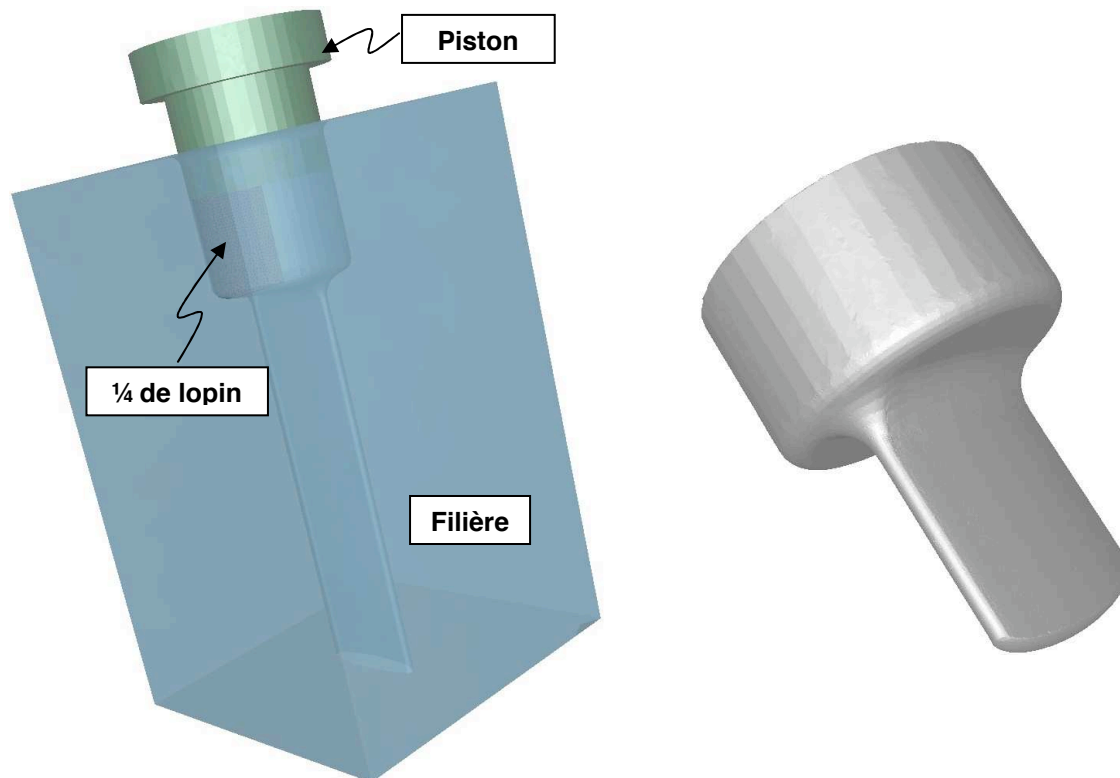


Figure 6.24 : Simulation du procédé de filage

Nous considérons la simulation du procédé de filage d'un lopin cylindrique à travers une filière de section ellipsoïdale (figure 6.24). Le matériau est élasto-viscoplastique, les paramètres rhéologiques sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 2,10^3 \text{ MPa} \\ m = 0,15 \\ E = 2,10^5 \text{ MPa} \\ \nu = 0,3 \end{array} \right.$$

Les températures initiales de la pièce et des outils sont respectivement 750°C et 25°C. Nous considérons une loi de frottement de type Coulomb limitée par Tresca (1.57) avec les paramètres $\bar{m} = 5.10^{-2}$ et $\mu = 2.10^{-2}$.

Pour l'adaptation de maillage, nous souhaitons faire des calculs avec une précision de 10% et un nombre maximal d'éléments de 150000. Nous considérons l'estimateur d'erreur $Z^2\text{-REP}^2$ (on utilisera un facteur correctif sur l'estimation d'erreur de 1,25). Les courbes d'évolution de l'erreur et du nombre d'éléments au cours de la simulation sont représentées sur les figures 6.25 et 6.26.

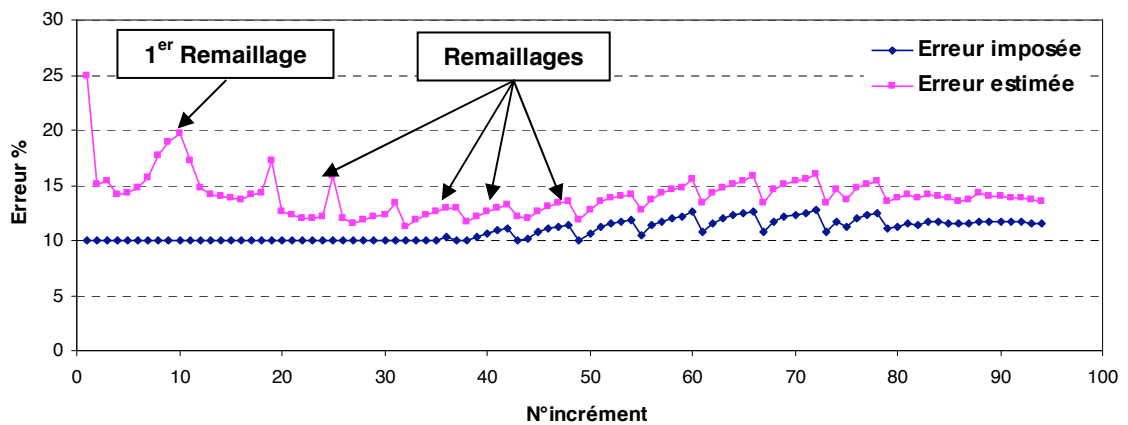


Figure 6.25 : Évolution de l'erreur dans la pièce au cours de la simulation du procédé de filage
 $\theta^{imp} = 10\%$

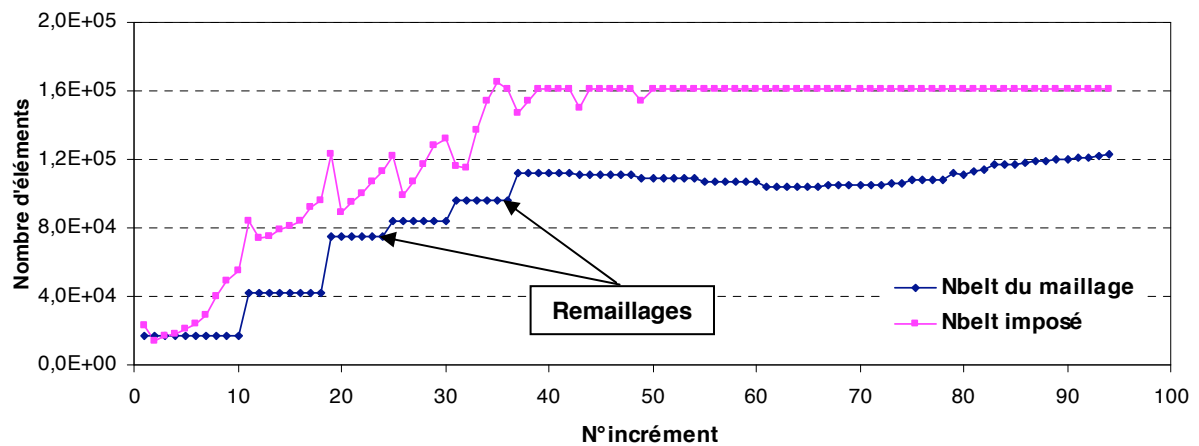


Figure 6.26 : Évolution du nombre d'éléments au cours de la simulation du procédé de filage
 $Nb_{elt}^{imp} = 150000$

Nous remarquons que la procédure de remaillage est déclenchée à chaque pic sur la courbe de l'erreur estimée, ce qui montre la cohérence du critère de contrôle de l'erreur avec ceux déjà existants dans Forge3[®] (accroissement de la déformation, pénétration, etc.). En effet la majorité des remaillages sont déclenchés sous le critère de pénétration. On observe qu'après le premier remaillage (figure 6.25), l'erreur diminue et tend vers l'erreur imposée. Après succession de quelques remaillages adaptatifs, l'erreur estimée est très proche de l'erreur imposée. D'autre part, on souligne qu'après chaque remaillage l'erreur diminue.

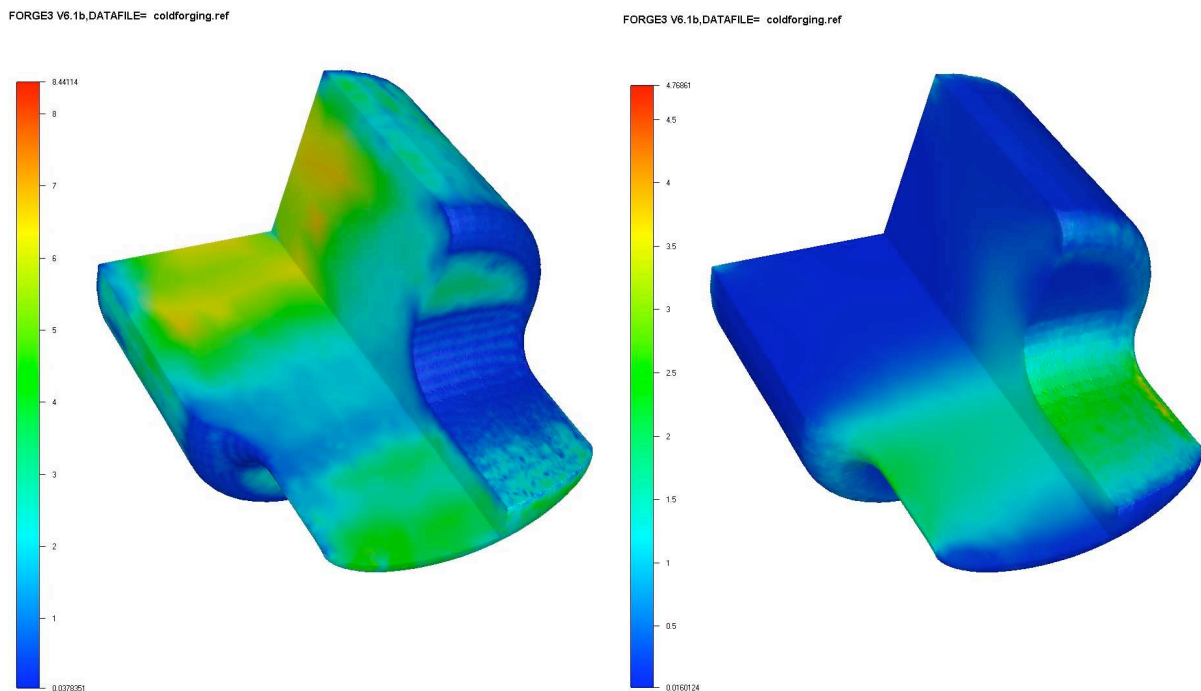
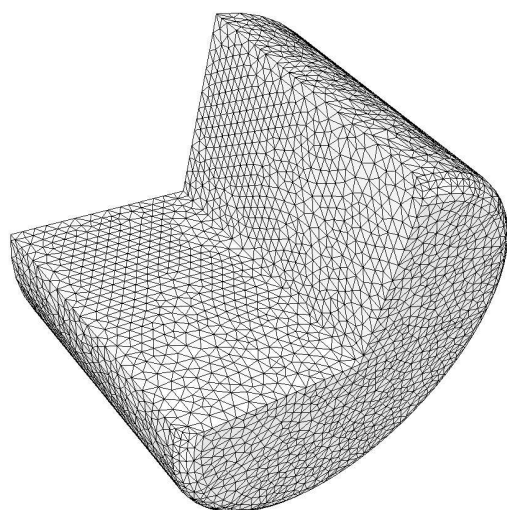


Figure 6.27 : Isovaleurs de la carte de taille (à gauche) et de la déformation équivalente (à droite)

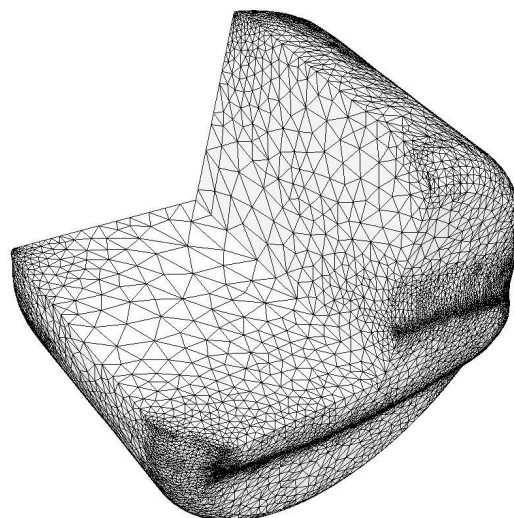
La figure 6.27 montre les isovaleurs de la carte de taille et de la déformation équivalente. On note que la distribution de la taille des éléments est cohérente avec celle des déformations. En effet au niveau de l'angle droit du piston et à l'entrée de la filière (zones de concentration de contrainte et de forte déformation équivalente) la taille des éléments est minimale et elle est de l'ordre de 0,03. Dans les zones en amont, la taille des éléments est maximale (de l'ordre de 8). Notons que le maillage initial présente une taille d'élément uniforme de l'ordre de 2 (figure 6.29, maillage initial).

L'évolution du maillage au cours du procédé est représentée sur la figure 6.28. La carte de taille relative à chaque maillage est donnée sur la figure 6.29. On souligne la corrélation entre les maillages et les cartes de tailles calculées par la procédure d'adaptation.

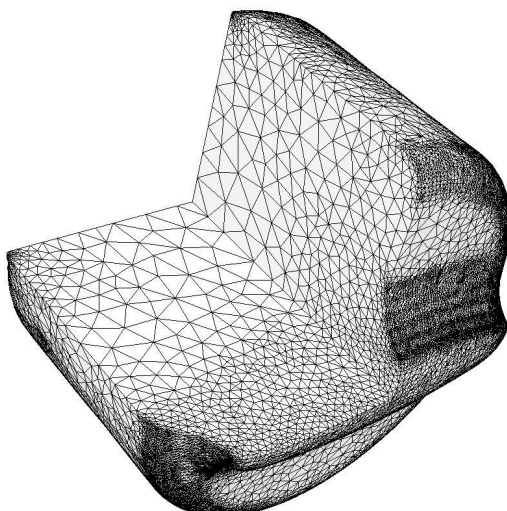
Pour ce type de problème, les avantages qu'offre le remaillage adaptatif sont manifestes. En effet, au niveau de la sortie de la zone de rétrécissement de la section, les maillages sont raffinés au niveau des couches superficielles de la pièce (couches de cisaillement maximal) et la taille augmente en épaisseur avec l'atténuation du cisaillement. Cette topologie particulière du maillage est difficile à obtenir par des boîtes de raffinement local.



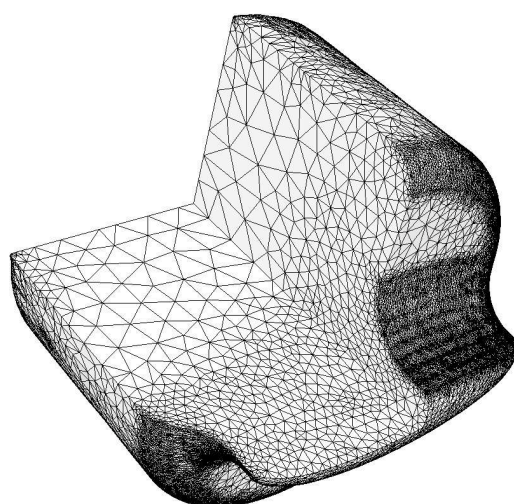
maillage initial: Nbelt = 16679 – Nbnoe = 4055



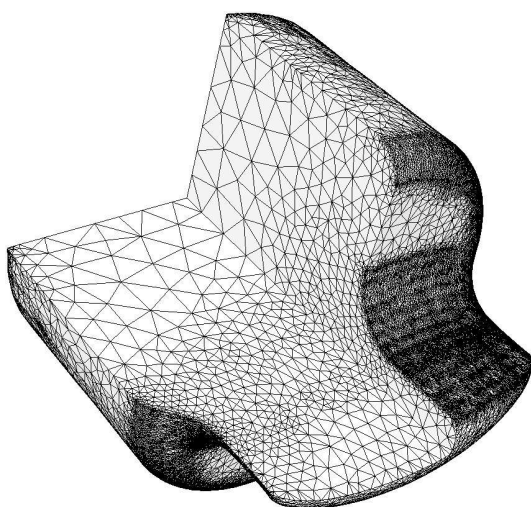
Nbelt = 42351- Nbnoe = 8801



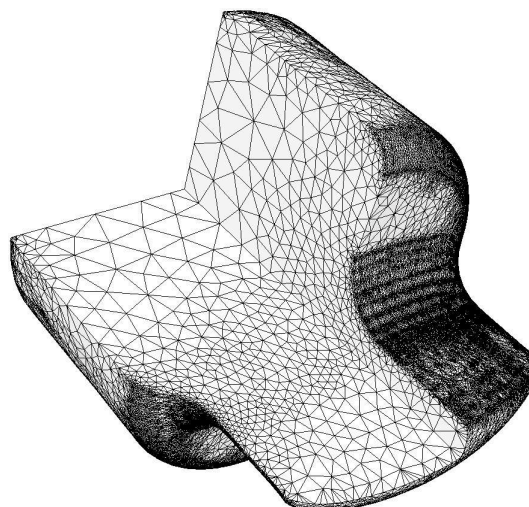
Nbelt = 111612 – Nbnoe = 24162



Nbelt = 106992 – Nbnoe = 24308



Nbelt = 107840 – Nbnoe = 26198



Nbelt = 118979 – Nbnoe = 30121

Figure 6.28 : Évolution du maillage au cours de la simulation du procédé de filage

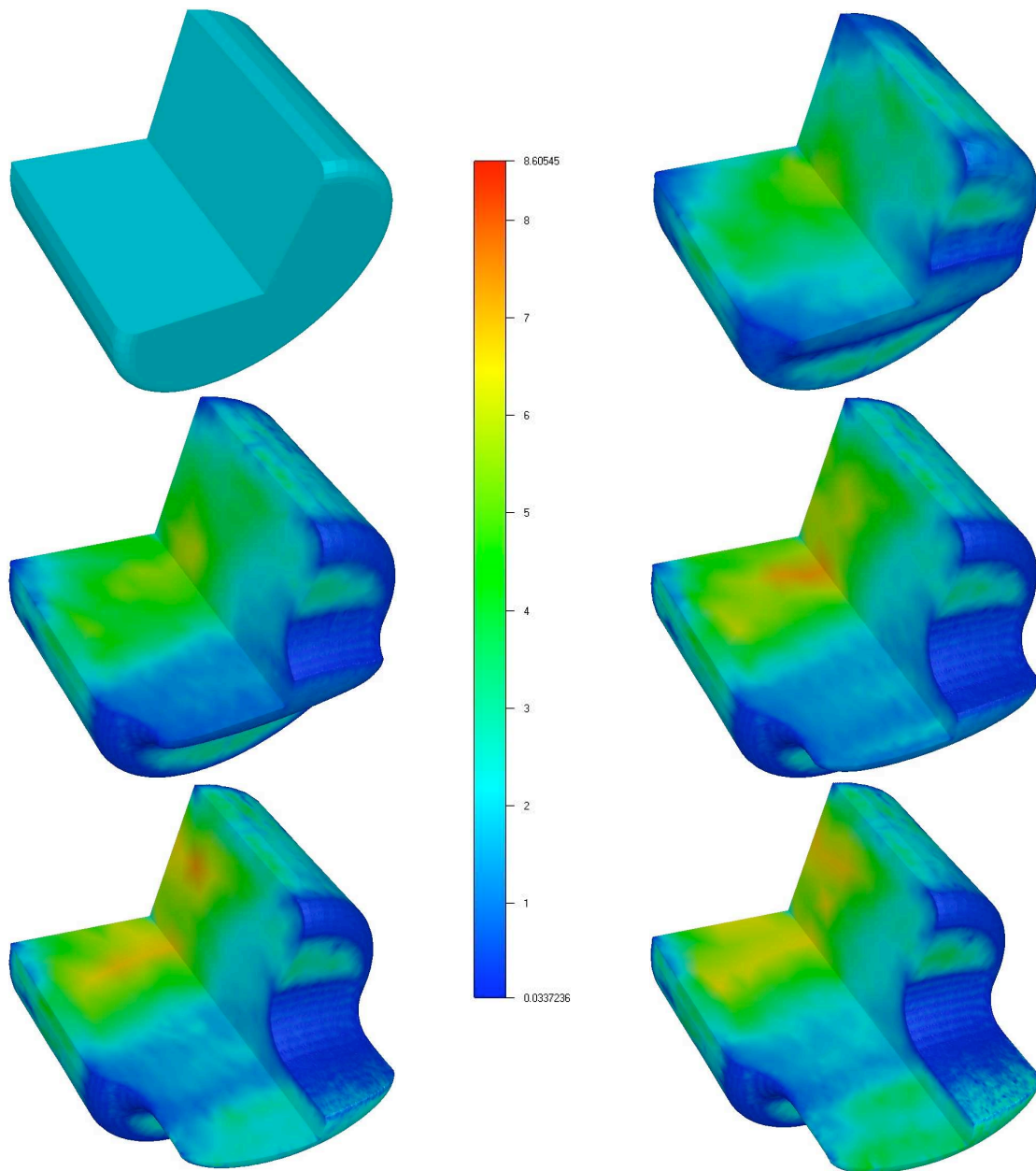


Figure 6.29 : Évolution de la carte de taille au cours de la simulation du procédé de filage

6.3.4 Forgeage d'un panneau de commande d'ouverture du train avant d'un avion (A 320)

Un autre cas d'application industrielle est le forgeage d'un panneau de commande d'ouverture du train avant de l'avion A320 à partir d'un lopin cylindrique en aluminium (figure 6.30).

Le matériau considéré obéit à la loi de Norton-Hoff. Les paramètres rhéologiques sont définis de manière expérimentale (rhéologie point par point). Pour des raisons de confidentialité, nous ne donnons pas les détails des paramètres rhéologiques.

Le frottement entre la pièce et les outils est de type Coulomb limité par Tresca (1.57) avec les paramètres $\bar{m} = 0,1$ et $\mu = 0,2$.

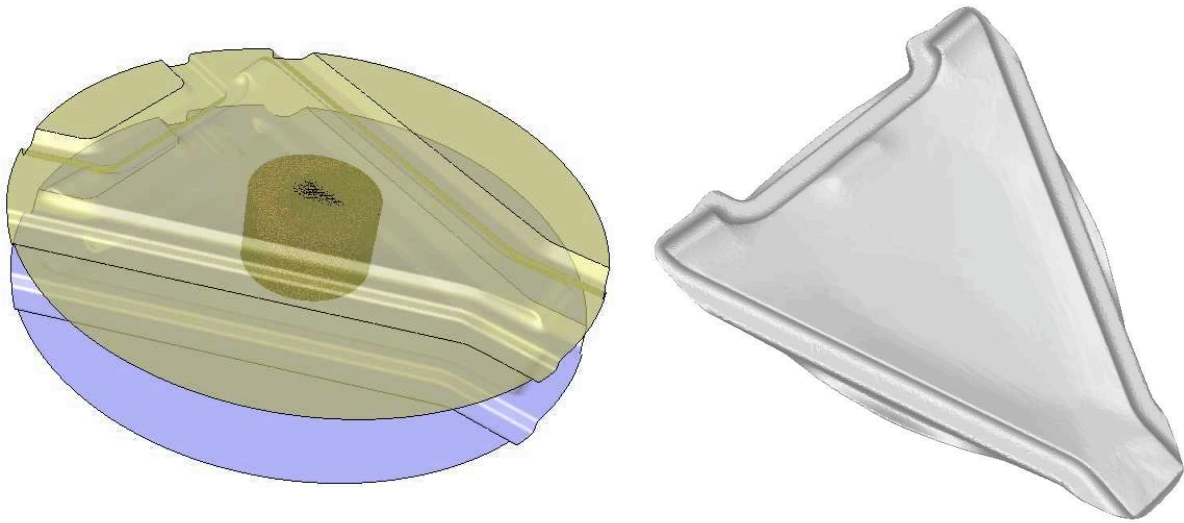


Figure 6.30 : Simulation de forgeage d'un panneau de commande
Ensemble lopin + outils (à gauche) et pièce finie (à droite)

Pour la procédure de remaillage adaptatif, on se propose de faire des calculs avec une précision de consigne de 5% et un nombre maximal d'éléments de 150000. Nous utilisons l'estimateur Z²-SPRP avec un facteur correctif de 1,25.

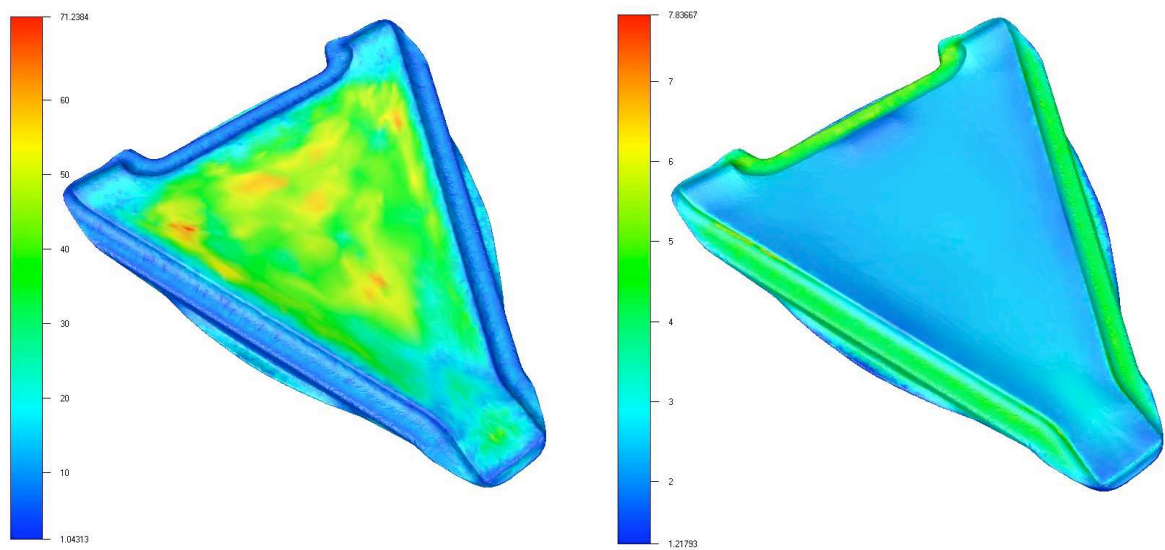


Figure 6.31 : Isovaleurs de la carte de taille (à gauche) et de la déformation équivalente (à droite)

155 remaillages ont été nécessaires pour la simulation du procédé. Le maillage initial (proposé par l'industriel) est suffisamment fin, afin d'assurer une bonne approximation de la courbure de la surface latérale du lopin et d'avoir suffisamment de degrés de libertés dans l'épaisseur. Ceci est nécessaire surtout à la fin du procédé quand celle-ci devient fine. L'évolution du maillage au cours du procédé est représentée sur la figure 6.34. On remarque qu'à la fin de la simulation le nombre d'éléments du maillage (172582) a légèrement dépassé le nombre d'éléments maximal préconisé (165000). Le nombre d'éléments calculé étant de 161216, le rapport entre la réponse et la consigne est de 1,07 ce qui est largement acceptable. Néanmoins, ce risque de dépassement des limites doit être pris en compte dans la définition du nombre d'éléments maximal à imposer.

La figure 6.31 montre la cohérence entre les isovaleurs de la carte de taille optimale calculée et celles de la déformation équivalente.

L'évolution de l'erreur et du nombre d'éléments au cours des incréments est donnée par les figures 6.32 et 6.33. Au début des calculs, l'erreur est importante. La précision imposée (5%) correspond à un nombre d'éléments qui dépasse la taille maximale préconisée du problème, ce qui explique le recourt dès le début des calculs à la deuxième stratégie d'optimisation (SO2). L'erreur imposée est ainsi revue à l'augmentation de 5 à 10%. D'autre part, on observe qu'au début des calculs le nombre d'éléments du maillage est supérieur au nombre calculé. En effet lors du déraffinement, le mailleur topologique conserve les nœuds frontières (notamment sur la courbure latérale) en tant que nœuds bloqués afin de respecter la géométrie de la pièce. L'importance du nombre de ces nœuds dans cet exemple limite le déraffinement du maillage.

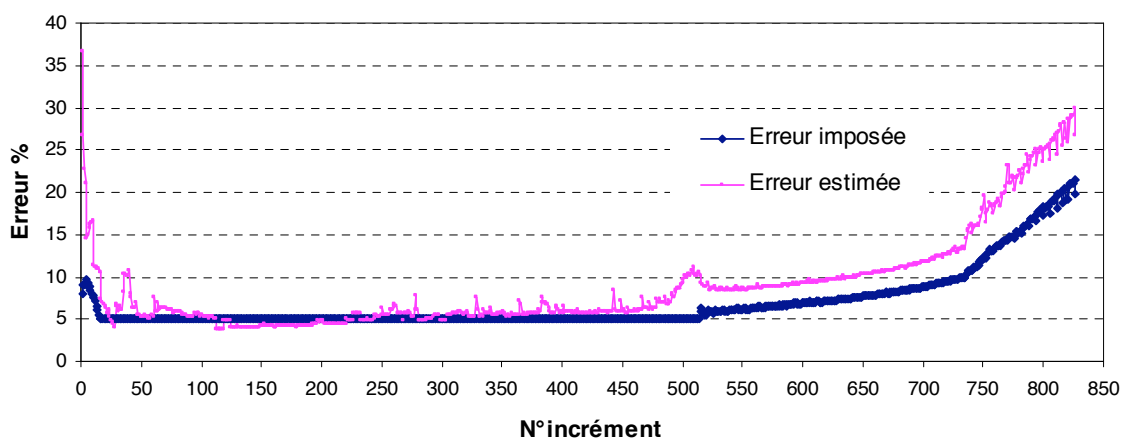


Figure 6.32 : Évolution de l'erreur au cours de la simulation de forgeage d'un panneau de commande
 $\theta^{\text{imp}} = 5\%$

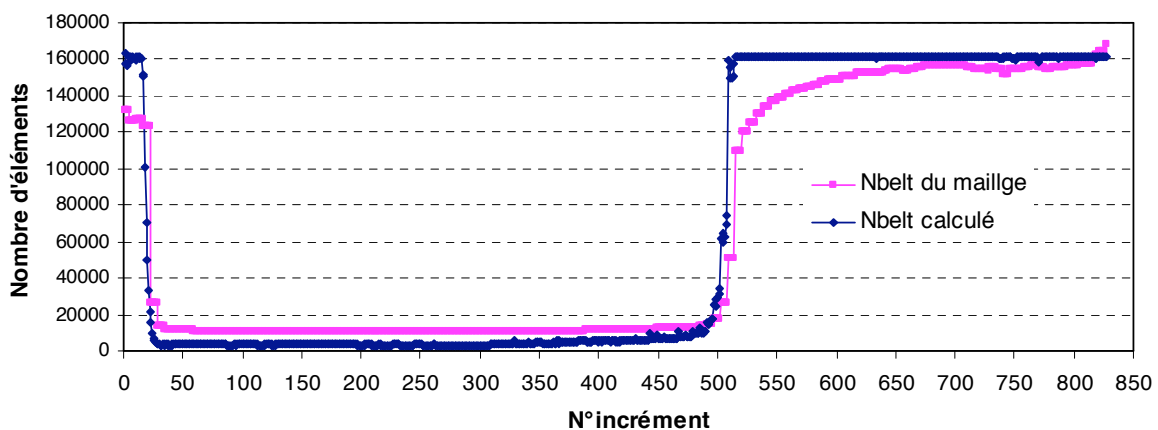
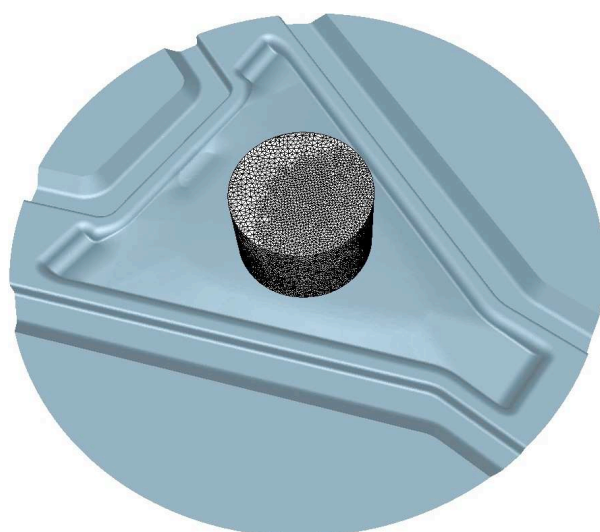
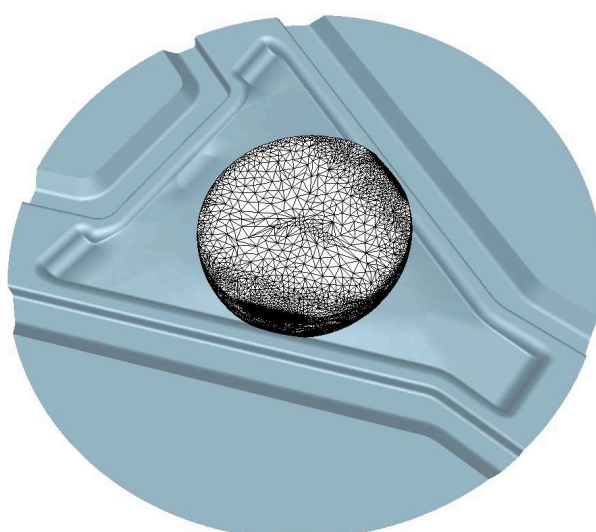


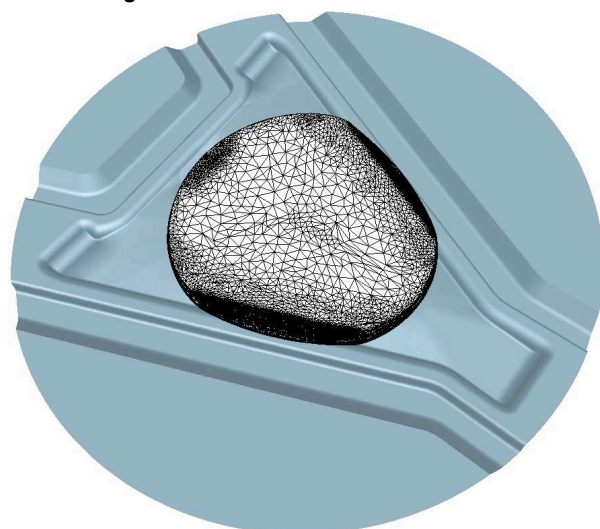
Figure 6.33 : Évolution du nombre d'éléments au cours de la simulation de forgeage d'un panneau de commande : $\text{Nbelt}^{\text{imp}} = 150000$



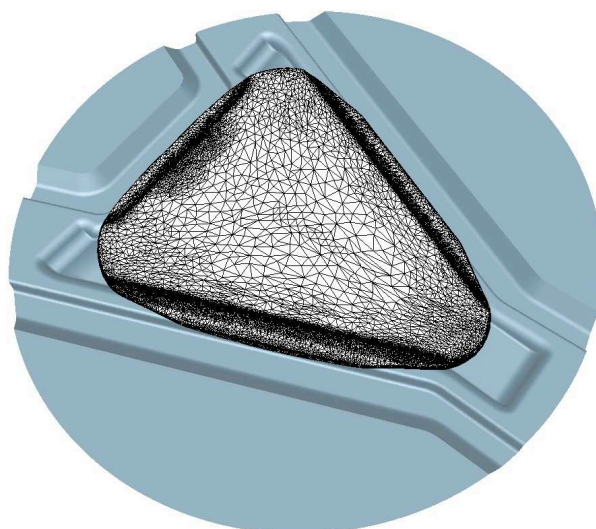
maillage initial : Nbelt = 131881 – Nbnoe = 26893



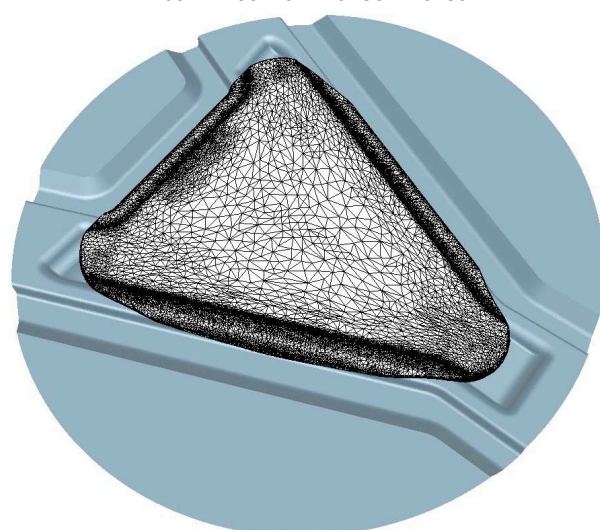
Nbelt = 136535 – Nbnoe = 31659



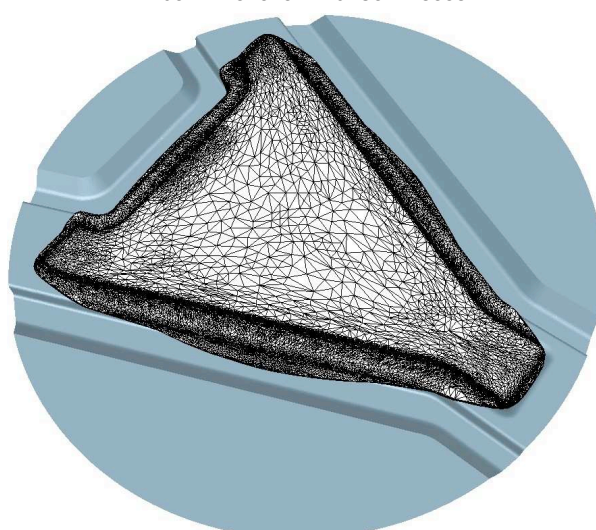
Nbelt = 156129 – Nbnoe = 40239



Nbelt = 157646 – Nbnoe = 43658



Nbelt = 164082 – Nbnoe = 46289



Nbelt = 172582 – Nbnoe = 49287

Figure 6.34 : Évolution du maillage au cours du forgeage d'un panneau de commande

6.3.5 Problème de poinçonnement d'une tôle

Ce dernier exemple d'application est le poinçonnement d'une tôle (figure 6.35). On considère une loi de comportement élasto-viscoplastique avec les paramètres rhéologiques suivants :

$$\begin{cases} K = 1,510^3 \text{ MPa} \\ m = 0,015 \\ E = 2.10^5 \text{ MPa} \\ \nu = 0,3 \end{cases}$$

La température initiale de la plaque et des outils est de 20°C. On considère des conditions de contact de type bilatéral collant (pas de frottement).

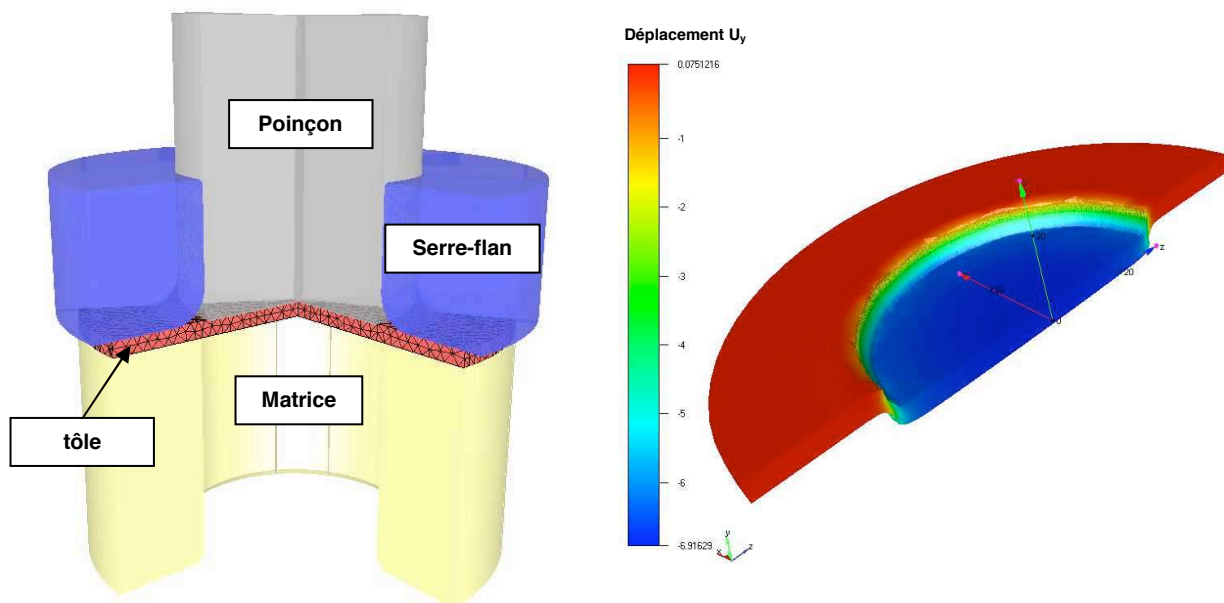


Figure 6.35 : Simulation du procédé de poinçonnement d'une tôle

Dans la procédure d'adaptation, la précision consigne est de 15% et le nombre maximal d'éléments de 100000. Nous utilisons l'estimateur Z²-REP² avec le facteur correctif de 1,25.

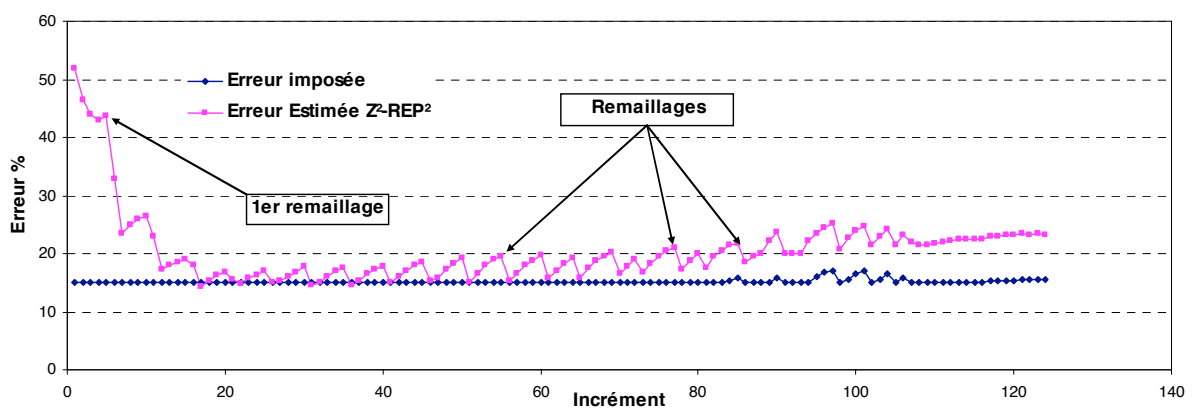


Figure 6.36 : Évolution de l'erreur au cours de la simulation de poinçonnement d'une plaque
 $\theta^{imp} = 15\%$

L'évolution des maillages et de la carte de taille est représentée sur la figure 6.38. Celle ci montre l'importance de l'adaptation de maillage sur ce type de problème. En effet, le volume

de la plaque est composé de deux régions : une région en contact avec l'outil et qui subit la totalité de l'effort de poinçonnement et une région pratiquement morte qui ne subit aucune sollicitation. Le rapport maximal des tailles des éléments entre ces deux zones est de l'ordre de 1500. D'autre part on remarque qu'au début de procédé, l'erreur obtenue après le premier remaillage est importante (de l'ordre de 32 %) par rapport à l'erreur consigne (15%). La procédure d'adaptation ne converge pas bien à cause de la singularité créée par l'angle du poinçon. Après une succession de 3 remaillages adaptatifs, l'erreur est de l'ordre de 17% ce qui est une valeur satisfaisante par rapport à la consigne. Du vingtième incrément jusqu'à l'incrément 80, la consigne est atteinte après chaque remaillage.

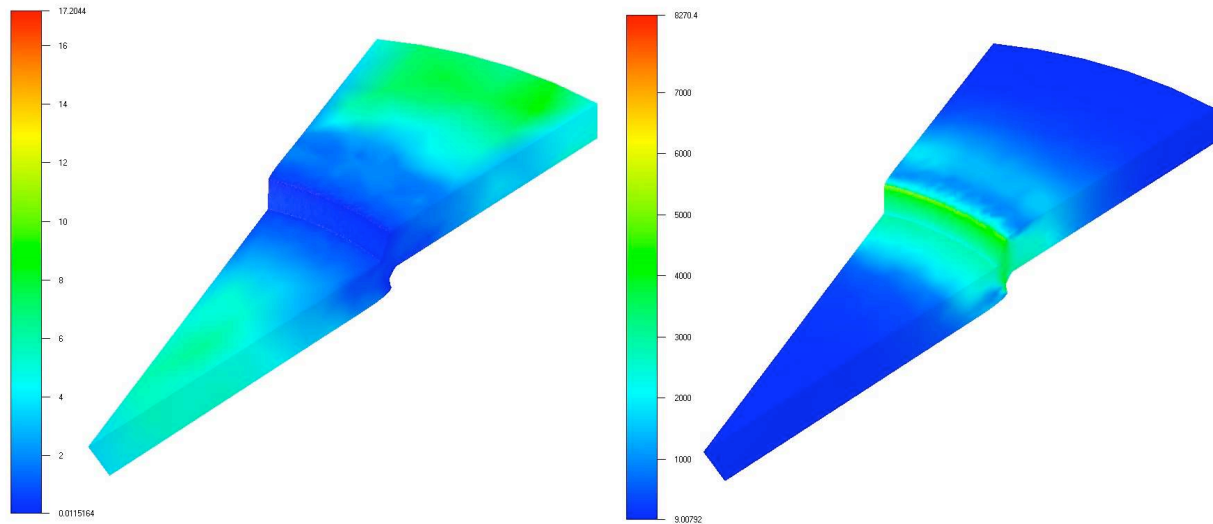


Figure 6.37 : Isovaleurs de la carte de taille (à gauche) et de la contrainte équivalente (à droite)

La figure 6.38 montre la corrélation entre la distribution de la contrainte équivalente et celle des tailles de maille.

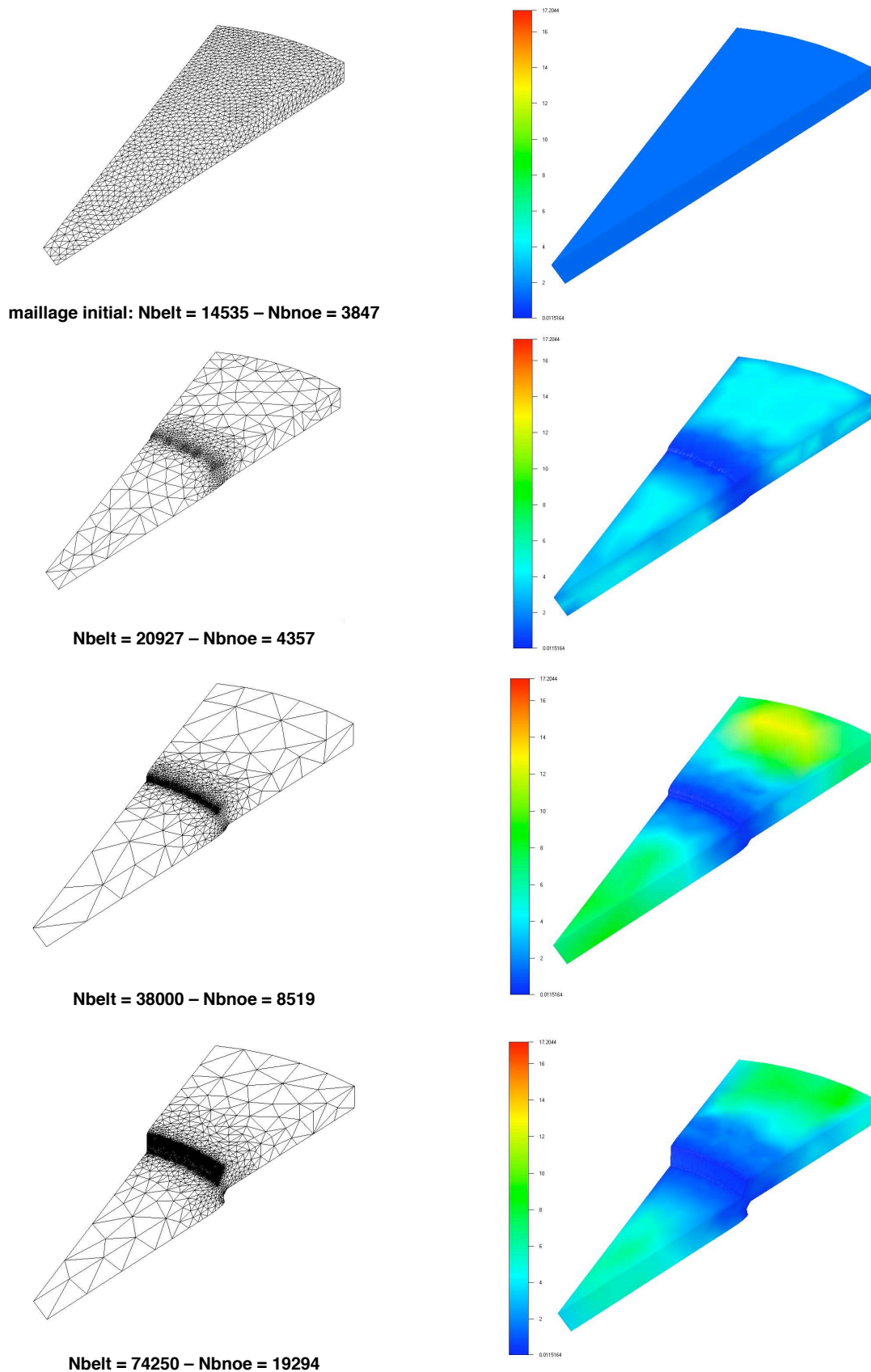


Figure 6.38 : Évolution du maillage et de la carte de taille au cours de la simulation

Conclusions et perspectives

Conclusions

Ce travail a permis de mettre en place un outil efficace pour le contrôle d'erreur et le remaillage adaptatif dans le cadre de la simulation numérique de la mise en forme des matériaux.

Le contrôle d'erreur est basé sur un estimateur d'erreur de type Z^2 , initialement développé dans le cadre de problèmes d'élasticité bidimensionnels. Nous avons proposé de l'étendre aux problèmes tridimensionnels non linéaires incompressibles pour lesquels aucun des résultats théoriques établis en élasticité ne peut être étendu. Notre approche revêt alors un caractère heuristique. L'approche repose sur l'hypothèse que la contrainte recouvrée $\tilde{\sigma}_h$ est plus proche de la solution exacte σ que la contrainte éléments finis σ_h .

Nous avons développé différentes techniques de recouvrement qui nous permettent de construire $\tilde{\sigma}_h$: la technique SPR, la technique de différences finis locales LO, la technique REP que nous avons améliorée (REP²) ainsi que deux variantes de la technique SPR que l'on a notées SPR-P et MPR. Ceci nous a permis de tester et de comparer les cinq estimateurs Z^2 associés à ces techniques.

Dans une première étape, l'efficacité des estimateurs est évaluée dans le cadre d'un problème analytique d'élasticité. Les motivations de cette étude sont, d'une part, le développement d'un estimateur d'erreur pour les calculs dans les outillages dont la déformation est supposée purement élastique. D'autre part, cela nous a permis de comparer les résultats obtenus en 3D avec des éléments tétraédriques et une formulation mixte vitesse/pression avec ceux de la littérature. A l'issue de cette étude, nous avons montré que les propriétés de superconvergence de la contrainte $\tilde{\sigma}_h$ démontrées en 2D dans la littérature sont retrouvées en 3D avec des maillages réguliers et irréguliers. Cela nous a permis de construire un estimateur d'erreur asymptotiquement exact pour les problèmes d'élasticité. Par ailleurs, la comparaison des techniques de recouvrement a montré que MPR améliore localement la précision de la technique SPR au niveau des zones de fortes contraintes. Cependant l'estimateur Z^2 -MPR est moins efficace et nécessite la prise en compte d'un facteur correctif de 1,1. Les résultats obtenus dans un exemple d'adaptation de maillage, ont montré que pour des niveaux de précision comparables, cet estimateur produit moins de degrés de liberté que les estimateurs Z^2 -REP², Z^2 -SPR et Z^2 -SPRP qui présentent des efficacités comparables. Il présente ainsi les propriétés d'un bon indicateur d'erreur.

Les estimateurs, ainsi évalués en élasticité, sont ensuite étudiés dans le cadre de problèmes de viscoplasticité incompressible. Les expérimentations numériques ont montré que les propriétés de superconvergence obtenues en élasticité n'ont pas été confirmées lors du passage à une loi viscoplastique. Toutefois, les contraintes recouvrées sont toujours de meilleure précision que la solution éléments finis et les estimateurs d'erreur donnent des résultats très satisfaisants. En effet, dans ce cas il n'est pas indispensable que l'estimateur soit asymptotiquement exact et il suffit qu'il soit régulier. Ceci veut dire qu'il doit converger asymptotiquement vers une valeur constante qui ne dépend pas du type de problème. Les résultats obtenus sur deux problèmes différents et avec des maillages réguliers montrent que les estimateurs Z^2 -REP², Z^2 -SPR et Z^2 -SPRP convergent vers la valeur 0,8 et l'estimateur Z^2 -MPR converge vers la valeur 0,65. La prise en compte d'un facteur correctif de 1,25 pour les estimateurs Z^2 -REP² et Z^2 -SPRP permet d'améliorer leur fiabilité. En terme de réponse à la précision consigne nous avons noté la meilleure efficacité avec Z^2 -REP². Dans le cas de l'estimateur Z^2 -MPR, le facteur correctif obtenu à partir des maillages réguliers ne semble pas fiable pour les maillages irréguliers. Malgré la correction introduite, cet estimateur a toujours tendance à sous-estimer l'erreur même s'il s'avère tout aussi performant en tant qu'indicateur d'erreur pour piloter le raffinement du maillage.

Après avoir étudié la fiabilité des estimateurs d'erreur, nous avons développé une procédure d'optimisation de maillage fiable et robuste pour les problèmes de mise en forme et les problèmes évolutifs de manière générale. Celle-ci est pilotée par un estimateur d'erreur et permet de construire des maillages optimaux, soit au sens de la précision souhaitée, ou au sens de la taille du problème.

La validation de cette procédure sur différents types de problèmes industriels (forgeage, filage, poinçonnement) a permis de mettre en évidence sa robustesse et son aptitude à contrôler la précision de la simulation numérique ainsi que la nécessité d'un tel outil dans un code de calculs éléments finis. D'autre part, nous avons souligné l'efficacité de l'estimateur Z^2 qui semble être très sensible aux phénomènes physiques dans un procédé de mise en forme tels que les contacts entre la pièce et les outils, les concentrations de contrainte et des taux de déformation, les couches de cisaillement, etc.

Perspectives

Les résultats obtenus à l'issue de ce travail sont prometteurs et on peut considérer que cela constitue une bonne base à l'adaptation automatique des calculs pour la simulation tridimensionnelle des procédés de mise en forme des matériaux. Toutefois certains points sont encore à améliorer et de nombreuses perspectives apparaissent :

Concernant les améliorations que l'on peut apporter dans un futur proche, on pourrait songer à améliorer l'efficacité de l'estimateur Z^2 -MPR. Nous avons montré que la technique MPR améliore considérablement la solution localement dans les zones de fortes contraintes. Le défaut de cet estimateur se situe au niveau de son efficacité globale. Ceci pourrait être dû au défaut de continuité des contraintes recouvrées. Quelques résultats obtenus en élasticité ont montré que l'efficacité pourrait être améliorée en faisant un lissage des contraintes ainsi recouvrées. La méthode consiste à effectuer des itérations de la procédure de recouvrement MPR. Trois itérations semblent donner un bon compromis entre la précision et l'efficacité. Elles permettent de construire un estimateur asymptotiquement exact en élasticité [Boussetta 04]. Cette approche reste à évaluer en viscoplasticité.

D'autres aspects importants pourraient faire l'objet de nouveaux développements futurs. On peut retenir principalement :

- développement d'un estimateur d'erreur pour le problème thermique. Ceci permettrait de faire le couplage thermo-mécanique au niveau de l'estimation d'erreur et l'adaptation de maillage. Une approche consiste à calculer un maillage optimal pour chaque problème (thermique et mécanique). Pour un élément quelconque de maillage la taille optimale sera alors la taille minimale entre les deux tailles calculées simultanément dans le problème thermique et le problème mécanique.
- couplage entre le calcul d'endommagement et le remaillage adaptatif [Bouchard 03] ce qui permettrait de développer une technique de propagation de fissure dans les structures. Par exemple, dans le problème de poinçonnement présenté dans le chapitre 6, ce couplage permettrait d'aller jusqu'au bout de la simulation en propageant une fissure dans la zone de fort cisaillement, jusqu'à la rupture totale de la matière.

Finalement d'autres perspectives sont envisageables et s'inscrivent dans un nouvel axe de recherche très prometteur en matière d'estimation d'erreur. C'est le développement des estimateurs d'erreur locaux. Ceux-ci permettent de mesurer l'erreur localement sur des entités qui intéressent les ingénieurs telles que par exemple l'erreur sur les contraintes de Von Mises. L'avantage principal de ces approches est que l'erreur a davantage un sens physique et offre ainsi un outil très intéressant pour les calculs de vérification et de conception. Nous pouvons citer dans ce contexte les travaux de Florentin et al. [Florentin 02], [Florentin 03], de Strouboulis et al. [Strouboulis 00] et d'Ohnimus et al. [Ohnimus 01].

Annexes

Annexe 1

Cette annexe contient les mesures d'erreur relatives locales et globales effectuées pour tracer les courbes de convergence ainsi que les courbes des indices d'efficacité dans le cas du problème d'élasticité de la plaque trouée (chapitre 5)

Choix du nombre de voisins pour le recouvrement LO

1. Recouvrement LO1

Erreurs	$\ \varepsilon - \varepsilon_h\ _E$			$\ \varepsilon - \tilde{\varepsilon}_h\ _E$			$\ \tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h\ _E$		
Voisins	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3
10	2,04 %	3,58 %	7,42 %	4,78%	2,06%	5,53%	6,55%	5,59%	12,50%
12	2,04 %	3,58 %	7,42 %	0,66%	2,01%	5,19%	2,68%	5,50%	12,1%
14	2,04 %	3,58 %	7,42 %	0,47%	1,77%	5,08%	2,50%	5,36%	12,15%
Patch topologique	2,04 %	3,58 %	7,42 %	0,47%	1,77%	5,08%	2,48%	5,27%	11,92%

Tableau A.1 : choix de nombre de voisins dans le cas de recouvrement LO1 avec des maillages réguliers

Erreurs	$\ \varepsilon - \varepsilon_h\ _E$			$\ \varepsilon - \tilde{\varepsilon}_h\ _E$			$\ \tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h\ _E$		
Voisins	B1	B2	B3	B1	B2	B3	B1	B2	B3
8	2,14%	5,11%	9,54%	1,41%	4,98%	7,78%	2,56%	8,27%	14,23%
10	2,14%	5,11%	9,54%	1,49%	4,45%	8,29%	3,01%	7,56%	14,46%
12	2,14%	5,11%	9,54%	1,45%	4,04%	8,46%	3,14%	7,11%	14,92%
patch topologique	2,14%	5,11%	9,54%	0,80%	3,66%	6,59%	2,40%	7,20%	14,49%

Tableau A.2 : choix de nombre de voisins dans le cas de recouvrement LO1 avec des maillages irréguliers

2. Recouvrement LO2

Erreurs	$\ \varepsilon - \varepsilon_h\ _E$			$\ \varepsilon - \tilde{\varepsilon}_h\ _E$			$\ \tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h\ _E$		
Voisins	A1	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A2	A3
12	2,04 %	3,58 %	7,42 %	0,32%	1,69%	4,45%	2,34%	5,27%	11,95%
14	2,04 %	3,58 %	7,42 %	0,44%	1,69%	4,55%	2,49%	5,30%	12,14%
Patch topologique									
18	2,04 %	3,58 %	7,42 %	0,44 %	1,70%	4,59%	2,49%	5,31%	12,17%
22	2,04 %	3,58 %	7,42 %	0,44%	1,70%	4,61%	2,49%	5,32%	12,17%

Tableau A.3 : choix de nombre de voisins dans le cas de recouvrement LO2 avec des maillages réguliers

Erreurs	$\ \varepsilon - \varepsilon_h\ _E$			$\ \varepsilon - \tilde{\varepsilon}_h\ _E$			$\ \tilde{\varepsilon}_h - \varepsilon_h\ _E$		
Voisins	B1	B2	B3	B1	B2	B3	B1	B2	B3
16	2,14%	5,11%	9,54%	0,84%	3,06%	6,60%	2,48%	6,44%	13,28%
18	2,14%	5,11%	9,54%	0,81%	3,07%	5,96%	2,47%	6,49%	13,62%
22	2,14%	5,11%	9,54%	0,85%	3,08%	6,03%	2,50%	6,49%	13,62%
Patch topologique	2,14%	5,11%	9,54%	0,83%	3,04%	-	2,48%	6,48%	-

Tableau A.4 : choix de nombre de voisins dans le cas de recouvrement LO2 avec des maillages irréguliers

Efficacité locale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur Z^2

1. Élément intérieur au volume

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR
A1	2,04 %	0,25 %	0,09 %	2,28 %	2,03 %	1,12	0,99	8,16	23,67
A2	3,58 %	1,14 %	0,38 %	4,67 %	3,82 %	1,30	1,07	3,14	9,42
A3	7,42 %	3,20 %	2,08 %	10,16 %	6,93 %	1,37	0,93	2,32	3,57

Tableau A.5 : Recouvrements SPR-P et MPR en volume avec des maillages réguliers

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²
A1	2,04 %	0,28%	0,30%	2,31%	2,34%	1,13	1,14	7,29	6,74
A2	3,58 %	1,21%	1,25%	4,72%	4,82%	1,32	1,34	2,96	2,86
A3	7,42 %	3,47%	3,53%	9,94%	10,33%	1,34	1,39	2,14	2,11

Tableau A.6 : Recouvrements SPR et REP² en volume avec des maillages réguliers

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR
B1	2,14%	0,90 %	0,73 %	2,57 %	2,10 %	1,20	0,98	2,38	2,93
B2	5,11%	2,70 %	1,23 %	6,21 %	5,39 %	1,21	1,05	1,89	4,15
B3	9,54%	5,92 %	4,23 %	12,80 %	6,67 %	1,34	0,70	1,61	2,26

Tableau A.7 : Recouvrements SPR-P et MPR en volume avec des maillages irréguliers

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²
B1	2,14%	0,82%	0,92%	2,50%	2,56%	1,18	1,19	2,60	2,32
B2	5,11%	2,77%	2,83%	6,28%	6,38%	1,23	1,25	1,84	1,81
B3	9,54%	6,10%	5,07%	12,32%	12,00%	1,29	1,26	1,56	1,88

Tableau A.8 : Recouvrements SPR et REP² en volume avec des maillages irréguliers

2. Élément frontière : recouvrement des contraintes

• Frontière libre

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR
A1	2,86 %	1,67 %	0,90 %	4,29 %	3,04 %	1,50	1,06	1,71	3,18
A2	4,47 %	2,92 %	1,74 %	6,36 %	3,89 %	1,42	0,87	1,53	2,57
A3	8,56 %	18,54%	3,41 %	14,06%	5,46 %	1,64	0,64	0,46	2,51

Tableau A.9 : Recouvrements SPR-P et MPR sur la frontière libre avec des maillages réguliers

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²
A1	2,86 %	1,78%	1,13%	4,44%	2,51%	1,55	0,87	1,60	2,52
A2	4,47 %	5,20%	3,11%	9,17%	5,00%	2,05	1,12	0,86	1,44
A3	8,56 %	18,83%	8,09%	19,34%	11,56%	2,26	1,35	0,45	1,05

Tableau A.10 : Recouvrements SPR et REP² sur la frontière libre avec des maillages réguliers

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR
B1	4,32 %	3,06 %	1,04 %	1,95 %	4,31 %	0,45	0,99	1,41	4,14
B2	11,34 %	10,18%	5,01 %	4,07 %	7,07 %	0,36	0,62	1,11	2,26
B3	21,81%	15,84%	7,72 %	8,87 %	15 %	0,41	0,69	1,38	2,83

Tableau A.11 : Recouvrements SPR-P et MPR sur la frontière libre avec des maillages irréguliers

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²	SPR	REP ²
B1	4,32 %	2,49%	2,16%	2,40%	0,87%	0,56	0,20	1,73	2
B2	11,34 %	5,29%	7,53%	8,46%	5,01%	0,75	0,44	2,14	1,51
B3	21,81%	14,00%	12,56%	19,68%	19,66%	0,90	0,90	1,56	1,74

Tableau A.12 : Recouvrements SPR et REP² sur la frontière libre avec des maillages irréguliers

• **Frontière de symétrie**

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR
A1	2,68 %	0,57 %	0,74 %	2,57 %	2,09 %	0,96	0,78	4,68	3,60
A2	5,63 %	3,06 %	1,53 %	3,52 %	4,53 %	0,62	0,80	1,84	3,67
A3	8,11 %	8,41 %	3,30 %	3,29 %	5,35 %	0,40	0,66	0,96	2,45
B1	1,98 %	1,04 %	1,27 %	1,03 %	0,84 %	0,52	0,42	1,91	1,55
B2	4,19 %	1,46 %	1,99 %	3,76 %	2,62 %	0,89	0,62	2,86	2,10
B3	7,80 %	13,98%	7,01 %	10,23%	2,48 %	1,31	0,32	0,56	1,11

Tableau A.13 : Recouvrement SPR-P et MPR sur la frontière de symétrie

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR	REP	SPR	REP	SPR	REP	SPR	REP
A1	2,68 %	0,66%	1,23%	3,05%	1,73%	1,14	0,65	4,08	2,17
A2	5,63 %	2,07%	2,22%	6,90%	4,03%	1,22	0,71	2,72	2,53
A3	8,11 %	3,03%	4,01%	8,69%	4,48%	1,07	0,55	2,68	2,01
B1	1,98 %	0,41%	0,33%	1,74%	1,77%	0,88	0,89	4,85	6,05
B2	4,19 %	0,88%	3,50%	4,30%	1,39%	1,03	0,33	4,74	1,20
B3	7,80 %	14,07%	5,25%	12,17%	5,05%	1,56	0,65	0,55	1,49

Tableau A.14 : Recouvrement SPR et REP² sur la frontière de symétrie

• **Frontière chargée**

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR
A1	0,073 %	0,013%	0,018%	0,068%	0,058%	0,94	0,90	5,42	3,93
A2	0,144 %	0,057%	0,032%	0,127%	0,167%	0,88	1,16	2,50	4,42
A3	0,44 %	0,540%	0,430%	0,180%	0,270%	0,42	0,62	0,82	1,03
B1	0,046 %	0,040%	0,033%	0,049%	0,043%	1,08	0,95	1,14	1,36
B2	0,119 %	0,095%	0,077%	0,039%	0,099%	0,33	0,84	1,25	1,55
B3	0,914 %	0,840%	0,881%	0,249%	0,245%	0,27	0,27	1,09	1,04

Tableau A.15 : Recouvrement SPR-P et MPR sur la frontière chargée

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR	REP	SPR	REP	SPR	REP	SPR	REP
A1	0,073 %	0,041%	0,020%	0,049%	0,054%	0,67	0,74	1,77	3,59
A2	0,144 %	0,150%	0,072%	0,160%	0,137%	1,12	0,95	0,96	2,00
A3	0,44 %	0,790%	0,59%	0,380%	0,176%	0,86	0,40	0,56	0,75
B1	0,046 %	0,042%	0,045%	0,057%	0,056%	1,24	1,23	1,09	1,01
B2	0,119 %	0,074%	0,114%	0,072%	0,072%	0,61	0,61	1,61	1,04
B3	0,914 %	0,790%	0,88%	0,260%	0,250%	0,29	0,28	1,16	1,04

Tableau A.16 : Recouvrement SPR et REP² sur la frontière chargée

• **Frontière mixte : libre/symétrie**

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR	SPR-P	MPR
A1	4.07 %	9.74 %	3.13 %	14.50%	2.08 %	3.55	0.51	0.42	1.30
A2	8.28 %	20.6 %	6.69 %	32.5 %	3.31 %	3.93	0.40	0.40	1.23
A3	14.81 %	42 %	12.10%	79 %	6.56 %	5.30	0.44	0.35	1.22
B1	3.68 %	6.30 %	3.16 %	9.42 %	3.63 %	2.56	0.99	0.58	1.16
B2	13.03 %	10.34%	5.20 %	18.19%	9.01%	1.4	0.69	1.26	2.51
B3	34.33%	24.11%	22.80%	60.62%	14.35%	1.77	0.42	1.42	1.50

Tableau A.17 : Recouvrement SPR-P et MPR sur l'union de frontière libre et de symétrie

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$		$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$		ξ		β	
		SPR	REP	SPR	REP	SPR	REP	SPR	REP
A1	4.07 %	4.10%	6.72%	8.15%	2.88%	2.00	0.71	0.99	0.61
A2	8.28 %	13.32%	12.06%	22.95%	4.11%	2.77	0.50	0.62	0.67
A3	14.81 %	37.67%	18.31%	69.50%	5.64%	4.69	0.38	0.39	0.81
B1	3.68 %	5.93%	6.55%	9.11%	4.00%	2.48	1.09	0.62	0.56
B2	13.03 %	9.56%	4.71%	22.09%	9.73%	1.69%	0.74	1.32	2.76
B3	34.33%	32.85%	28.31%	74.20%	25.86%	2.16	0.75	1.04	1.21

Tableau A.18 : Recouvrement SPR et REP sur l'union de frontière libre et de symétrie

3. Recouvrement des déplacements sur la frontière libre

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$	$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$	ξ	β
A1	2,86 %	1,34%	4,08%	1,43	2,13
A2	4,47 %	3,70%	7,50%	1,68	1,21
A3	8,56 %	16,83%	15,65%	1,83	0,51

Tableau A.19 : Recouvrement LO sur la frontière libre avec des maillages réguliers

Maillage	$\ \sigma - \sigma_h\ _E$	$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ _E$	$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ _E$	ξ	β
B1	4,32%	1,68%	4,80%	1,11	2,57
B2	11,34%	5,86%	8,50%	0,75	1,93
B3	21,81%	24,23%	18,13%	0,83	0,90

Tableau A.20 : Recouvrement LO sur la frontière libre avec des maillages irréguliers

Efficacité globale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur Z^2

Maillage	A1			A2			A3		
Technique de recouvrement	LO	SPR-P	MPR	LO	SPR-P	MPR	LO	SPR-P	MPR
$\ \sigma - \sigma_h\ $	0,61%	0,61%	0,61%	1,19%	1,19%	1,19%	2,48%	2,48%	2,48%
$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ $	0,17%	0,18%	0,14%	0,89%	0,54%	0,37%	2,15%	2,00%	1,38%
$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ $	0,61%	0,61%	0,58%	1,42%	1,21%	1,12%	2,51%	2,35%	2,01%
ξ	1,00	1,00	0,96	1,19	1,01	0,94	1,01	0,95	0,81
β	3,58	3,39	4,46	1,34	2,19	3,25	1,16	1,24	1,79

Tableau A.21 : Recouvrements LO, SPR-P et MPR dans le cas des maillages réguliers

Maillage	A1			A2			A3		
Technique de recouvrement	SPR	REP ² $\omega=1$	REP ² $\omega=0,1$	SPR	REP ² $\omega=1$	REP ² $\omega=0,1$	SPR	REP ² $\omega=1$	REP ² $\omega=0,1$
$\ \sigma - \sigma_h\ $	0,61%	0,61%	0,61%	1,19%	1,19%	1,19%	2,48%	2,48%	2,48%
$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ $	0,16%	0,22%	0,15%	0,56%	0,62%	0,51%	1,98%	1,90%	1,77%
$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ $	0,61%	0,61%	0,61	1,24%	1,22%	1,21%	2,49%	2,37%	2,37
ξ	1,00	1,00	1,00	1,04	1,02	1,01	1,00	0,95	0,95
β	3,75	2,74	3,86	2,13	1,92	2,34	1,25	1,31	1,40

Tableau A.22 : Recouvrements SPR et REP² dans le cas des maillages réguliers

Maillage	B1			B2			B3		
Technique de recouvrement	LO	SPR-P	MPR	LO	SPR-P	MPR	LO	SPR-P	MPR
$\ \sigma - \sigma_h\ $	0,77%	0,77%	0,77%	1,42%	1,42%	1,42%	2,93%	2,93%	2,93%
$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ $	0,27%	0,30%	0,35%	0,81%	0,81%	0,69%	2,73%	2,12%	1,85%
$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ $	0,79%	0,76%	0,73%	1,49%	1,42%	1,32%	3,17%	2,67%	2,38%
ξ	1,01	0,99	0,94	1,05	1,00	0,93	1,08	0,91	0,81
β	2,87	2,56	2,20	1,75	1,76	2,07	1,07	1,38	1,58

Tableau A.23 : Recouvrements LO, SPR-P et MPR dans le cas des maillages irréguliers

Maillage	B1			B2			B3		
Technique de recouvrement	SPR	REP ² $\omega=1$	REP ² $\omega=0,1$	SPR	REP ² $\omega=1$	REP $\omega=0,1$	SPR	REP ² $\omega=1$	REP ² $\omega=0,1$
$\ \sigma - \sigma_h\ $	0,77%	0,77%	0,77%	1,42%	1,42%	1,42%	2,93%	2,93%	2,93%
$\ \sigma - \tilde{\sigma}\ $	0,26%	0,31%	0,28%	0,78%	0,84%	0,81%	2,18%	2,58%	2,21%
$\ \tilde{\sigma} - \sigma_h\ $	0,77%	0,77%	0,77%	1,46%	1,46%	1,46%	3,04	3,21	3,00%
ξ	1,00	1,00	1,00	1,03	1,03	1,03	1,04	1,09	1,02
β	3,00	2,50	2,75	1,82	1,68	1,75	1,35	1,14	1,33

Tableau A.24 : Recouvrements SPR et REP² dans le cas des maillages irréguliers

Annexe 2

Cette annexe contient les mesures d'erreur relatives locales et globales effectuées pour tracer les courbes de convergence ainsi que les courbes des indices d'efficacité dans le cas des problèmes de viscoplasticité (chapitre 5)

Efficacité locale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur

1. Erreurs éléments finis

Cas	Elément intérieur			Elément de la surface libre		
Maillage	E1	E2	E3	E1	E2	E3
$\ s - s_h\ _E$	2,89%	5,26%	11,57%	2,30%	5,42%	11,93%

Tableau A.25 : Erreur EF locale dans le cadre du problème d'écrasement entre tas plats

2. Élément intérieur au domaine

Technique de recouvrement	$\ s - \tilde{s}_h\ $			$\ \tilde{s}_h - s_h\ _E$			ξ			β		
	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
SPR-P	0,62%	2,60%	10,9%	1,63%	2,79%	5,98%	0,56	0,53	0,52	4,66	2,02	1,06
SPR	0,64%	2,65%	11,2%	1,65%	2,80%	6,49%	0,57	0,53	0,56	4,50	1,98	1,03
MPR	0,46%	2,45%	9,56%	1,25%	2,21%	5,26%	0,43	0,42	0,45	6,28	2,14	1,21
REP²	0,65%	2,33%	10,9%	1,67%	2,66%	6,76%	0,58	0,51	0,58	4,44	2,25	1,06

Tableau A.26 : Efficacité locale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur : cas d'un élément intérieur

3. Élément de la surface libre

Technique de recouvrement	$\ s - \tilde{s}_h\ $			$\ \tilde{s}_h - s_h\ _E$			ξ			β		
	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
SPR-P	0,83%	2,34%	15,43%	1,89%	4,03%	13,44%	0,82	0,74	1,13	2,79	2,31	0,77
SPR	1,03%	2,88%	14,90%	2,31%	4,38%	12,79%	1,00	0,81	1,07	2,24	1,88	0,80
MPR $\omega=1$	0,90%	2,95%	10,07%	2,52%	5,17%	9,46%	1,09	0,95	0,79	2,56	1,83	1,19
MPR $\omega=0,1$	0,81%	2,52%	8,77%	1,86%	4,12%	6,77%	0,81	0,76	0,57	2,86	2,15	1,36
REP ² $\omega=1$	1,36%	3,88%	16,92%	1,86%	3,21%	13,47%	0,81	0,72	1,42	1,69	1,40	0,71
REP ² $\omega=0,1$	1,26%	3,73%	13,80%	1,77%	3,35%	10,49%	0,77	0,62	0,88	1,83	1,45	0,86

Tableau A.27 : Efficacité locale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur : cas d'un élément de la frontière libre

Efficacité globale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur

1. Erreurs éléments finis

Problème	Ecrasement d'un lopin cubique			Filage d'une barre		
Maillage	E1	E2	E3	F1	F2	F3
$\ s - s_h\ _E$	6.29%	10.02%	16.10%	18.35%	28.38	46.95%

Tableau A.28 : Erreur EF globale

2. Problème d'écrasement du lopin entre tas plats

Technique de recouvrement	$\ s - \tilde{s}_h\ $			$\ \tilde{s}_h - s_h\ _E$			ξ			β		
	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3	E1	E2	E3
SPR-P	5,28%	8,31%	12,7%	4,88%	7,51%	12,3%	0,78	0,75	0,76	1,19	1,21	1,27
SPR	5,34%	8,25%	12,3%	5,03%	7,68%	13,0%	0,80	0,77	0,81	1,18	1,21	1,31
MPR	5,23%	8,34%	12,4%	3,89%	6,41%	10,5%	0,62	0,64	0,65	1,20	1,20	1,30
REP²	5,30%	8,35%	12,4%	5,04%	7,70%	12,9%	0,80	0,77	0,80	1,19	1,20	1,30

Tableau A.29 : Efficacité globale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur

3. Problème de filage d'une barre

Technique de recouvrement	$\ s - \tilde{s}_h\ $			$\ \tilde{s}_h - s_h\ _E$			ξ			β		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
SPR-P	15,1%	22,5%	35,5%	15,0%	24,7%	47,5%	0,82	0,87	1,01	1,22	1,26	1,32
SPR	13,6%	20,5%	30,3%	15,4%	25,0%	47,5%	0,84	0,88	1,01	1,35	1,38	1,55
MPR	14,4%	21,5%	34,7%	12,0%	18,2%	32,0%	0,65	0,64	0,68	1,30	1,32	1,35
REP²	14,0%	21,4%	35,2	14,9%	23,7%	42,2%	0,81	0,84	0,90	1,31	1,33	1,33

Tableau A.30 : Efficacité globale des techniques de recouvrement et des estimateurs d'erreur

Bibliographie

- [Abdulwahab 95] **F. Abdulwahab**, « Postprocessing techniques and adaptivity in finite element method ». *PhD thesis, Publication 95:8*, Chalmers University of Technology, Departement of Structural Mechanics, 1995.
- [Ainsworth 92] **M. Ainsworth, J. T. Oden**, « A procedure for a posteriori error estimation for h-p finite element methods ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol.101, pp.73-96, 1992.
- [Ainsworth 97] **M. Ainsworth, J. T. Oden**, « A posteriori error estimation in finite element abalysis ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 142, pp.1-88, 1997.
- [Ainsworth 00] **M. Ainsworth, D. Kay**, « Approximation theory of the *hp*-version finite element method and application to the non-linear Laplacian ». *Applied Numerical Mathematics*. Vol. 34, pp. 329-344, 2000.
- [Aliaga 00] **C. Aliaga**, « Simulation numérique par éléments finis 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Avril 2000.
- [Babuška 73] **I. Babuška**, « The finite element method with penalty ». *Math. Comp.*, vol. 27, pp. 221-228, 1973.
- [Babuška 78] **I. Babuška, W. C. Rheinbaldt**, « A posteriori error estimates for the finite element method ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 12, pp. 1597-1615, 1978.
- [Babuška 79] **I. Babuška, W. C. Rheinbaldt**, « Adaptive approches and releability estimations in finite element analysis ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 17/18, pp.519-540, 1979.
- [Babuška 82] **I. Babuška, B. A. Szabó**, « On the rates of convergence of the finite element method ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 18, pp. 323-341, 1982.
- [Babuška 92-a] **I. Babuška, L. Planck and R. Rodriguez**, « Basic problems of a posteriori error estimations ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 101, pp.97-112, 1992.
- [Babuška 92-b] **I. Babuška, L. Plank and R. Rodriguez**, « Quality assessment of a posteriori error Estimation in finite elements ». *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.11, pp.285-306, 1992.

- [Babuška 94] **I. Babuška, T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, S. K. Gangaraj and K. Copps**, « Validation of a posteriori error estimators by numerical approach » *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 37, pp. 1073-1123, 1994.
- [Babuška 96] **I. Babuška, T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, S. K. Gangaraj**, «Compuetr-based Proof of the existence of superconvergence points in the finite element method ;superconvergence of the derivatives in finite element solutions of laplace's, and the elasticity equations ». *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 12, pp. 347-392, 1996.
- [Baranger 90] **J. Baranger and K. Najib** « Analyse numérique des écoulements quasi-Newtoniens don't la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de carreau ». *Numer. Meth.*, Vol. 58, pp. 35-49, 1990.
- [Baranger 91] **J. Baranger, H. El Amari** « Estimateur a posteriori d'erreur pour le calcul adaptatif d'écoulement quasi-Newtoniens ». *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M²AN* , Vol. 25, n°1 pp. 31-48, 1991.
- [Barboza 04] **J. A. P. Barboza**, «Traitement du contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, février 2004.
- [Barlow 76] **J. Barlow**, « Optimal stresses locations in finite element models ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 243-251, 1976.
- [Benalcazar 97] **H. Benalcazar**, « Estimations d'erreurs a posteriori et maillages adaptatifs pour des problèmes stationnaires et évolutifs ». *Thèse de doctorat*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997.
- [Bertrand 86] **C. Bertrand, C. David and J. L. Chenot** « Stresses calculation in finite element analysis of three-dimensional hot shape rolling ». *The 2nd International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pp. 207-212, Gothenburg, 28-29 August 1986.
- [Bigot 01] **E. Bigot**, « Simulation tridimensionnelle du remplissage de corps minces par injection ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2001.
- [Blacker 94] **T. Blacker and T. Belytschko**, « Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant enhancements ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 517-536, 1994.
- [Boroomand 97-a] **B. Boroomand and O. C. Zienkiewicz**, « Recovery by Equilibrium in Patches (REP) ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 40, pp. 137-164, 1997.
- [Boroomand 97-b] **B. Boroomand and O. C. Zienkiewicz**, « An Improved REP and the effectivity robustness test ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 40, pp. 3247-3277, 1997.

- [Boroomand 99] **B. Boroomand, O. C. Zienkiewicz**, « Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II : Adaptivity in linear problems ». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 176, pp. 127-146, 1999.
- [Bouchard 03] **P.O. Bouchard, J. Signorelli, R. Boussetta, L. Fourment**, « Damage and Adaptive Remeshing applied to 3D modelling of blanking and drilling », *VII International Conference on Computational Plasticity. COMPLAS'03*, Barcelona, 7-10 April 2003.
- [Boussetta 03] **R. Boussetta, L. Fourment**, « Study of various 3D element patches for a posteriori error estimation based on recovery techniques ». *International Conference on Adaptive Modeling and simulation, ADMOS 03*, Götteborg, 29 September-1 October, 2003.
- [Boussetta 04] **R. Boussetta, L. Fourment**, « A posteriori error estimation and three-dimensional adaptive remeshing : application to error control of non-steady metal forming simulations ». *International Conference on numerical methods in industrial forming processes, NUMIFORM 04*, Ohio State, June 13-17, 2004.
- [Boyère 99] **E. Boyère**, « Contribution à la modélisation numérique thermomécanique tridimensionnelle du forgeage ». *Thèse de doctorat*, Ecole Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Juin 1999.
- [Cho 96] **J. R. Cho, J. Tinsley Oden**, « A priori error estimations of *hp*-finite element approximations for hierarchical models of plate- and shell-like structures ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 132, pp.135-177, 1996.
- [Ciarlet 91] **P. G. Ciarlet and J. L. Lions**, «Finite element methods for second-order problems : The basic error estimates». *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. II, Chap.III :Finite Elment Methods (Part 1), North-Holland 1991.
- [Coffignal 87] **G. Coffignal**, « Optimisation et fiabilité des calculs éléments Finis en élastoplasticité ». *Thèse de doctorat d'état*, Université Pierre et Marie Curie, Juin 1987.
- [Coorevits 92] **P. Coorevits, P. Ladevèze, J. P. Pelle, P. Rougeot** « Some new applications of a method for the control and optimization of finite element computations ». *New Advances in Computational Structural Mechanics, Elsevier*. pp.205-217, 1992.
- [Coorevits 95] **P. Coorevits, P. Ladevèze, J. P. Pelle**, « An automatic procedure with a control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 121, pp.91-120, 1995.
- [Coorevits 04] **P. Coorevits, E. Bellenger** « Alternative mesh optimality criteria for h-adaptive finite element method ». *Finite elements in analysis and desig, Elsevier*. Vol. 40, pp.2195-1215, 2004.

- [Coupez 91] **T. Coupez**, « Grandes déformations et remaillage automatique ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, novembre 1991.
- [Coupez 94] **T. Coupez**, « A mesh improvement method for 3D automatic remeshing ». *4th International Conference of Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*. Swansea, Wales 6th – 8th April 1994.
- [Coupez 00] **T. Coupez**, « Génération et adaptation de maillage par optimisation locale », *la Revue Européenne des éléments finis*, Vol. 9(4), pp. 403-423, 2000.
- [Cugnon 00] **F. Cugnon**, « Automatisation des calculs éléments finis dans le cadre de la méthode-p ». *Thèse de doctorat*, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, 2000.
- [Dufeu 97] **E. Dufeu**, « Calcul d'erreur et adaptation de maillage en 3 dimensions ». *Thèse de doctorat*, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, 1997.
- [Dyduch 95] **M. Dyduch, S. Cescotto & A. M. Habraken**, « efficient error estimates for adaptive remeshing in 2D metal forming modelling ». *Simulations of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, Shen & Dawson (eds), pp. 419-424, 1995 Balkema, Rotterdam.
- [Dyduch 96] **M. Dyduch**, « Adaptive methods in finite element simulations of metal forming processes ». *Thèse de doctorat*, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, 1996.
- [Florentin 02] **E. Florentin, L. Gallimard, J. P. Pelle**, « Evaluation of the local quality of stresses in 3D finite element analysis ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 191, pp.4441-4457, 2002.
- [Florentin 03] **E. Florentin, L. Gallimard, P. Ladevèze, J. P. Pelle**, « Local error for stresses in 3D structural analysis ». *Computer & structures*. Vol. 81, pp.1751-1757, 2003.
- [Fourment 92] **L. Fourment**, « Estimateurs d'erreur et maillage adaptatif pour la simulation numérique des procédés de mise en forme ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, juin 1993.
- [Fourment 95] **L. Fourment and J. L. Chenot**, « Error estimators for viscoplastic materials : Application to forming processes ». *Engineering Computations*, Vol. 12, pp. 469-490, 1995.
- [Frey 99] **P. Jean Frey, P-L. George**, « Maillages : Applications aux éléments finis ». HERMES Science Publications, 1999.
- [Gallimard 94] **L. Gallimard**, « Contrôle adaptatif des calculs en élastoplasticité et en viscoplasticité » *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure de Cachan, Janvier 1994.

- [Gallimard 96] **L. Gallimard, P. Ladevèze, J. P. Pelle**, « Error estimation and adaptivity in elastoplasticity ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 39, pp. 189-217, 1996.
- [Gallimard 00] **L. Gallimard, P. Ladevèze, J. P. Pelle**, « An enhanced error estimator on the constitutive relation for plasticity problems ». *Computers & Structures*. Vol. 78, pp.801-810, 2000.
- [George 01] **P. L. George** (direction), « Maillage et adaptation ». LAVOISIER, 2001.
- [Gruau 04] **C. Gruau**, « Génération de métriques pour adaptation anisotrope de maillages, applications à la mise en forme des matériaux ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [Hermann 65] **L. R. Hermann**, « Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem ». *AIAA Journal* , Vol. 3, n°1 pp. 1896-1900, 1965.
- [Hétu 92] **J. F. Hétu**, « Adaptive remeshing for viscous incompressible flows ». *AIAA Journal* , Vol. 30, n°8 pp. 1986-1992, 1992.
- [Huerta 00] **A. Huerta, P. Díez** « Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 181, pp. 21-41, 2000.
- [Johnson 92] **C. Johnson and P. Hansbo**, « Adaptive finite element methods in computational mechanics ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 101, pp.143-181, 1992.
- [Ladevèze 75] **P. Ladevèze**, «Comparaison de modèles de milieux continus». *Thèse d'état*, Université Pierre et Marie Curie, 1975.
- [Ladevèze 86] **P. Ladevèze, G. Coffignal and J. P. Pelle**, « Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis ». in **I. Babuška. O. C. Zienkiewicz, J. Gago, E. R. de A. Oliveira**, « Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations ». *John Wiley & Sons Ltd (1986)* Chap. 11, pp. 181-203.
- [Ladevèze 96] **P. Ladevèze, E. A. W. Maunder**, « A general method for recovering equilibrating element tractions ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 137, pp.111-151, 1996.
- [Ladevèze 99-a] **P. Ladevèze, N. Moës**, « Adaptive control for finite element analysis in plasticity ». *Computers & Structures*. Vol. 73, pp.45-60, 1999.
- [Ladevèze 99-b] **P. Ladevèze, N. Moës, B. Douchin**, « Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 176, pp.247-264, 1999.
- [Ladevèze 00] **P. Ladevèze**, « Constitutive relation error estimators for time-dependent non-Linear FE analysis ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 188, pp.775-788, 2000.

- [Ladevèze 01] **P. Ladevèze et J. P. Pelle** « La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non-linéaire : erreurs a posteriori et contrôle adaptatif des paramètres ». *Hermès*, 2001.
- [Le Dain 91] **M. A. Le Dain**, « Méthode multigrilles et h-adaptation : application au calcul de structures élastiques bidimensionnelles ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1991.
- [Lee 97] **C. K. Lee, S. H. Lo**, « Automatic adaptive refinement finite element procedure for 3D stress analysis ». *Finite Elements In Analysis And Design*, Vol. 25, pp. 135-166, 1997.
- [Lee 99] **C. K. Lee, S. H. Lo**, « A full finite element analysis using adaptive refinement and PCG solver with back interpolation ». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 170, pp. 39-64, 1999.
- [Liszka 80] **T. Liszka and J. Orkisz**, « The finite differences method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics ». *Computer & Structure*, Vol. 11, pp. 83-95, 1980.
- [Liszka 84] **T. Liszka**, « An interpolation method for an irregular net of nodes ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 1599-1612, 1984.
- [Marie 97] **S. E. Marie**, « Un modèle de parallélisation S.P.M.D. pour la simulation numérique de procédés de mise en forme de matériaux ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Mars 1997.
- [Marin 91] **P. Marin**, « Sur le contrôle des structures 2D et 3D élastiques incompressibles et quasi-incompressibles ». *Thèse de doctorat*, Université Pierre et Marie Curie, Juillet 1991.
- [Mocellin 99] **K. Mocellin**, « Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud. Etude du contact et calcul multigrille ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, juillet 1999.
- [Oden 89] **J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz and T. A. Westermann**, «Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 2 : A posteriori error estimation ». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 77, pp. 113-180, 1989.
- [Ohnimus 01] **S. Ohnimus, E. Stein and E. Walhorn**, « Local error estimates of FEM for displacements and stresses in linear elasticity by solving local neumann problems ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 52, pp. 727-746, 2001.
- [Perchat 00] **E. Perchat**, « MINI-Élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D. Application au forgeage ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, juillet 2000.

- [Prudhomme 01] **S. Prudhomme and J. T. Oden**, « Simple techniques to improve the reliability of a posteriori error estimates for finite element approximations ». *European Conference on Computational Mechanics, ECCM-2001*.
- [Rassineux 95] **A. Rassineux**, « Maillage automatique tridimensionnel par une technique frontale pour la méthode des éléments finis ». *Thèse de doctorat*, Université de Nancy, 1995.
- [Rassineux 97] **A. Rassineux**, « 3D mesh adaptation. Optimization of tetrahedral meshes by advancing front technique ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 141, pp.335-354, 1997.
- [Romkes 03] **A. Romkes, S. Prudhomme and J. T. Oden**, « A priori error analysis of stabilized discontinuous Galerkin method ». *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 46, pp 1289-1311, 2003.
- [Strouboulis 00] **T. Strouboulis, I. Babuška, D. K. Datta, K. Copps, S. K. Gangaraj**, « A posteriori estimation and adaptive control of the error in the quantity of interest. Part I : A posteriori error estimation of the error in the Von Mises stress and the stress intensity factor ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 181, pp.261-294, 2000.
- [Szabó 86] **B. A. Szabó**, « Estimation and Control of error based on p convergence», in **I. Babuška, O. C. Zienkiewicz, J. Gago, E. R. de A. Oliveira**, «Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations». *John Wiley & Sons Ltd (1986)* Chap.3, pp. 61-78.
- [Szabó 90] **B. A. Szabó**, « The use of a priori error estimates in engineering computations ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 82, pp.139-154, 1990.
- [Szabó 91] **B. A. Szabó and I. Babuška** « Finite Element Analysis ». *John Wiley & Sons*, 1991.
- [Traoré 01] **K. Traoré**, « Simulation thermomécanique du laminage circulaire : développement d'une formation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle ». *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, Mars 2001.
- [Wheeler 87] **M. F. Wheeler, J. R. Whiteman**, « Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite-element approximations ». *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 3, pp. 65-82, 1987.
- [Wiberg 93] **N-E. Wiberg and F. Abdulwahab**, « Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2703-2724, 1993.
- [Wiberg 94] **N-E. Wiberg, F. Abdulwahab and S. Ziukas** « Enhanced Superconvergent Patch recovery incorporating equilibrium and

- boundary conditions ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3417-3440, 1994.
- [Wiberg 95] **N-E. Wiberg, F. Abdulwahab and S. Ziukas**, « Improved element stresses for node and element patches using Superconvergent Patch Recovery ». *Communications In Numerical Methods In engineering*, Vol. 11, pp. 619-627, 1995.
- [Zienkiewicz 83] **O.C. Zienkiewicz, J. P Gago and D. W. Kelly**, « The hierarchical concept in finite element analysis ». *Computers & structures*, Vol. 16, pp.53-65, 1983.
- [Zienkiewicz 87] **O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu**, « A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis », *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 24, pp. 337-357, 1987.
- [Zienkiewicz 88] **O. C. Zienkiewicz, Y. C. Liu and G. C. Huang**, « Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems », *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 25, pp. 23-42, 1988.
- [Zienkiewicz 89-a] **O. C. Zienkiewicz, Y. C. Liu and G. C. Huang**, « Error estimates and convergence rates for various incompressible elements », *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 28, pp. 2191-2202, 1989.
- [Zienkiewicz 89-b] **O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu & N. G. Gong**, « Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 28, pp. 879-891, 1989.
- [Zienkiewicz 92] **O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu**, « The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and adaptive finite element ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 101, pp.207-224, 1992.
- [Zienkiewicz 92(I)] **O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu**, « The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.
- [Zienkiewicz 92(II)] **O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu**, « The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.
- [Zienkiewicz 99] **O.C. Zienkiewicz, B. Boroomand, J. Z. Zhu** « Recovery procedures in error Estimation and adaptivity. Part I : Adaptivity in nonLinear problems of elasto-plasticity behaviour ». *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 176, pp. 111-125, 1999.
- [Zienkiewicz 00] **O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor**, « Errors, recovery processes and error estimates». *The finite element method*, Vol. 1, chap.14, Butterworth-Heinemann 2000.

- [Zhu 90] **J.Z. Zhu and O.C. Zienkiewicz**, « Superconvergence recovery technique and a posteriori error estimator ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 30, pp.1321-1339, 1990.
- [Zhu 99] **J.Z. Zhu and Zhimin Zhang**, « The relationship of some a posteriori estimators », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 176, pp.463-475, 1999.
- [Yazdani 00] **A. A. Yazdani, H. R. Riggs and A. Tessler**, « Stress recovery and error estimation for shell structures ». *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 47, pp.1825-1840, 2000.

